República de Moçambique
Ministério da Educação e Cultura
IEDA- Instituto de Educação Aberta e à Distância

PROGRAMA DO ENSINO SECUNDÁRIO À DISTÂNCIA

(PESD)

MATERIAL DE ESTUDO DE MATEMÁTICA DA 10ª CLASSE

República de Moçambique
Ministério da Educação e Cultura
IEDA- Instituto de Educação Aberta e à Distância

Material de Estudo de Matemática 10ª Classe

Ficha Técnica:

Elaboração

- Abel Ernesto Uqueio Mondlane
- Adélia Machaieie
- Esperança Michau

Coordenação

- Departamento pedagógico

Digitação e formatação

- Repartição das TIC's

Direcção

- Messias Bila Uile Matusse

ÍNDICE

Introdução

O presente guião está estruturado de forma a orientar claramente a sua aprendizagem dos conteúdos propostos para esta classe. São apresentados neste guião os conteúdos e os objectivos gerais e específicos para esta classe bem como a estratégia de como abordar cada tema.

A estrutura sugerida é de agregar conteúdos por secções podendo estas serem divididas por partes.

Em cada secção é proposta uma forma de abordagem dos temas incluindo alguns exemplos para facilitar a compreensão dos conteúdos. Para a consolidação, fazem parte deste guião tarefas resolvidas e tarefas propostas com ou sem solução apresentada.

A avaliação será por secções, por isso, o estudante será submetido no mínimo a três testes ao longo do ano.

A avaliação será por secções, por isso será submetido no mínimo a três testes ao longo do ano.

Objectivos da classe

Ao terminar a 10ª classe, o aluno deve possuir conhecimentos sobre:

- Teoria de conjuntos;
- Polinómios;
- Funções quadráticas, exponenciais e logarítmica;
- Inequação quadrática exponencial e logarítmica;
- Equações exponenciais e logarítmicas;
- Elementos de Trigonometria;
- Estatística;
- Como operar com conceitos, procedimentos e métodos apropriados para o desenvolvimento de processos de pensamento lógico;

Desenvolver a capacidade de comunicação:

- Desenvolver capacidades para a busca de informação em diferentes meios e usar tecnologias;
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas matemáticos que reflectem situações quotidianas da vida económica e social do país e do mundo, no domínio Q (números racionais);
- Desenvolver habilidades de:

- Utilizar correctamente instrumentos de medição;
- Converter as unidades de medida;
- Estimar quantidades;
- Esboçar figuras, a partir de objectos reais;
- Recolher e organizar dados, assim como representá-los em tabelas e gráficos;
- Interpretar fenómenos sociais, económicos, naturais, etc. a partir de tabelas e gráficos;

- Identificar relações funcionais e suas propriedades partindo das suas representações, para usá-las na modelação de situações práticas;

- Desenvolver a confiança em si próprio: exprimir e argumentar as suas opiniões; formular juízos elementares sobre situações concretas; enfrentar com confiança novas situações e mostrar flexibilidade e criatividade.
- Desenvolver hábitos de trabalho, persistência e rigor: manifestar responsabilidade, disponibilidade, autonomia e interesse para planificar, organizar e realizar os trabalhos de matemática de forma organizada e revelar preocupação de qualidade na apresentação dos trabalhos.
- Desenvolver o espírito de tolerância e cooperação: Colaborar nos trabalhos em grupo, partilhando saberes e responsabilidades de maneira solidária e sociável, ouvindo e respeitando as opiniões dos outros, mostrando espírito crítico e autocrítica e participando na realização de actividades e na resolução de problemas.

Amigo estudante! A matemática é, relativamente, fácil e interessante. Mas, para que ela se apresente assim para si, será preciso observar os seguintes pontos:

Como estudar matemática

Em geral:

1. Ler os textos de matemática, pedindo esclarecimentos, sempre que for necessário;
2. Realizar as tarefas, solicitando ajuda do professor no CAA, sempre que precisar;
3. Corrigir os exercícios do livro e ou aqueles adicionais que o Professor disponibilizar no CAA ou por outra fonte, para que estejam todos certos no seu caderno na hora de revê-los para a prova;
4. Saber identificar no texto e rever os pré-requisitos básicos;
5. Usar rascunho para fazer as operações;
6. Organizar os cálculos com capricho;
7. Não tentar memorizar os conteúdos, mas sim, compreendê-los, pois só desta maneira se aprende a raciocinar;
8. Resolver as expressões por partes e lembrar-se de substituir os resultados parciais;

Problemas:

1. Lê-los, com atenção, até entendê-los perfeitamente;
2. Encontrar ligação entre o que é dado e o que é pedido;
3. Buscar diferentes caminhos para resolvê-los, planeando sua solução através de esquemas, perguntas, fórmulas, etc;
4. Não se dar por vencido até encontrar um caminho e, então, iniciar sua resolução;
5. Conferir se os dados foram copiados correctamente;
6. Efectuar os cálculos com a máxima atenção;
7. Fazer a revisão dos cálculos, pois a maioria dos erros nos problemas está nas operações;
8. Reler a pergunta, para respondê-la adequadamente.

Amigo estudante! Podemos dizer muita coisa nesta área para dar o maior apoio possível neste seu estudo desta disciplina, mas vamos apenas acrescentar mais um método que poderá parecer moroso mais vai ser certamente útil.

1º Momento : Ler com muita atenção e concentração, uma ou duas páginas (em matemática é essencial o conhecimento das definições, a sua importância e o seu significado). Agora coloca de lado o texto lido

2º Momento: Sem olhar para o texto, escrever num papel as palavras, raciocínios, desenhos e/ou definições que te lembres, sem grandes esforços ou percas de tempo. De momento, não é muito importante ter lembranças rigorosas.

3º Momento: Olhar criticamente para o que escreveste. Tem sentido? Falta alguma coisa? Qual é a ordem lógica das definições? Como explicarias a uma pessoa o que acabaste de ler? etc ... É natural que agora te lembres de coisas que não te recordaste no momento anterior.

4º Momento: Voltar a ler o mesmo texto e fazer um resumo. Os conceitos matemáticos ganham maior clareza quando se resolvem problemas/exercícios. Resolve os exercícios disponíveis.

5º Momento: Só depois de resolver correctamente os exercícios recomendados, continuar a leitura das páginas seguintes a que se submete um tratamento semelhante.

Amigo estudante! Embora pareça um desperdício de tempo, este procedimento apesar de lento rende mais. Pois o conhecimento dos conceitos fundamentais possibilita um melhor domínio dos assuntos estudados e dos que se irás estudar a seguir. Por isso, nos agradaria saber que vai seguir o nosso conselho.

O que você irá estudar nesta classe.

Unidades temáticas

1. Teoria de conjunto;
2. Equações quadráticas paramétricas simples;
3. Equações biquadradas;
4. Funções quadráticas
5. Inequações quadráticas;
6. Funções exponenciais;
7. Logaritmo e Funções Logarítmicas;
8. Trigonometria;
9. Estatística;
10. Geometria espacial.

Esquema por secções

Secção I

1. Teoria de conjuntos;
2. Equações quadráticas paramétricas simples;
3. Equações biquadradas;
4. Funções quadráticas.

Secção II

1. Equações e Inequações Quadráticas;
2. Funções Exponencial e Logarítmica;
3. Equações e Inequações Exponenciais;
4. Equações e Inequações Logarítmicas.

Secção III

1. Trigonometria;
2. Estatística;
3. Geometria espacial.

SECÇÃO I

Parte I

Teoria de conjunto

Amigo Estudante, seja bem vindo a primeira parte da primeira secção. Nesta parte irá aprender conteúdos sobre teoria de conjunto, onde será capaz por exemplo de saber o que é um conjunto, conjuntos e suas representações .

Assim, vamos enumerar os objectivos específicos, que te vão orientar durante o seu estudo.

Objectivos específicos

Os objectivos específicos para esta parte são:

1. Usar os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos;
2. Representar um conjunto por extensão e por compreensão, através de diagramas de Venn, chavetas e/ou intervalos e na recta graduada;
3. Efectuar as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos;
4. Resolver problemas concretos da vida real, aplicando as propriedades das operações sobre conjuntos;

Conteúdos

Sim, como é do seu conhecimento não deverá avançar para os novos conteúdos sem antes rever as matérias que viu nas lições anteriores. Porque estes conteúdos são pré requisito para a assimilação dos novos conteúdos. Assim, com esse intuito, terá de fazer uma revisão dos conteúdos abaixo. Em casos de dúvidas, para o seu esclarecimento, pode recorrer aos seus colegas, ao docente da disciplina e ou ao tutor no CAA.

Conteúdos para a revisão

- Conjunto e elemento de um conjunto;
- Representação de conjunto;
- Relação de pertença;
- Definição de conjuntos por extensão e por compressão;
- Conjunto vazio e conjunto singular.

Muito bem, já terminou com a revisão, em seguida realiza o estudo de novos conteúdos. Tendo em conta os momentos que te propomos logo no inicio do estudo deste guião.

Novos conteúdos

- Relações entre conjuntos
- Subconjunto . Relação de inclusão (contém e está contido)
- Igualdade de conjuntos

- Conjunto universal;
- Operações com conjuntos;
- Reunião de conjuntos;
- Intersecção de conjuntos;
- Diferença de conjuntos;
- Complementar de conjunto;
- Propriedades das operações de conjuntos;
- Resolução de problemas concretos da vida real.

Abordagem dos conteúdos

1- Relações entre conjuntos

Material necessário**: Livro de Matemática**

Assim, com o livro você deverá proceder de acordo com o método que te propomos no início do estudo do guião.

Ler com muita atenção e concentração uma ou duas páginas as definições sobre teorias de conjunto, observando a sua importância e o seu significado tendo como referência a relação entre conjuntos, relação entre elemento e conjunto e as suas operações.

Amigo, lembre se que para trabalharmos com as relações entre conjuntos e mas tarde com as operações entre conjuntos, devemos antes dominar aspectos sobre alguns tipos de conjuntos com características especiais.

Conjunto vazio
Chama-se vazio ao conjunto que não tem nenhum elemento e representa-se por A={ } ou ..Ø.

Ex: Conjunto P dos números pares, que terminam por 1, é um conjunto vazio, pois não existe número par que termine por 1.

Então P={ } ou ..Ø..

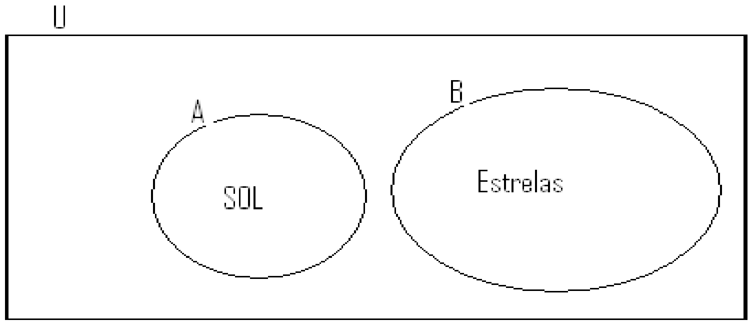
Conjunto singular
Chama-se singular ao conjunto constituído por um único elemento.

Ex: A= {sol } Sendo A o conjunto de estrelas do sistema solar.

Conjunto universo
Chama-se universo, ao conjunto definido de tal forma que inclua todos os objectos que satisfaçam seus critérios. Pode conter um número finito ou infinito de objectos ou elementos, mas deve conter necessariamente pelo menos um elemento. e é sempre representado pela letra U.

Ex:

U= conjunto das estrelas é um conjunto universo infinito .Enquanto que;
U= Planetas do sistema solar é um conjunto universo finito.



Muito certo, vejamos agora,

Relações entre conjuntos (inclusão e exclusão)

Considera os conjuntos U de todos os animais quadrúpedes, M dos mamíferos
U= $\{cabrito, leao, gato, cao, cavalo, burro....\}$
M= $\{Cabrito, Gato, Leao\}$

Amigo, verificas que:

Todos os elementos do conjunto M pertencem ao conjunto U.
Assim, dissemos que:

M está contido em U
M está incluso em U
M é subconjunto de U

Simbolicamente : $M \subset U$ **,** lê-se M **está contido** em U
Ou de outra forma lê-se U **contém** M
$U \supset M$

Assim:

Podemos dizer que um conjunto **está contido** noutro, quando todos os elementos do primeiro conjunto pertencem ao segundo.

Podemos dizer que um conjunto **contém** outro, quando todos os elementos do segundo conjunto pertencem ao primeiro.

Observa agora em: **P=** $\{Pássaro, Peixe\}$
Será que os elementos do conjunto P pertencem ao conjunto U?
Assim, dissemos que:

P não está contido em U
P não está incluso em U
P não é subconjunto de U

Simbolicamente: $P \not\subset U$, lê-se P não está contido em U

Amigo, saibas que na relação entre conjuntos, podemos ver também que um conjunto não faz parte de outro e a essa relação chamamos de **Exclusão**.

Assim, podemos dizer que um conjunto P não é subconjunto de outro conjunto U, desde que um elemento de P não pertença a P,U.

Caro amigo, agora preste atenção:

Para qualquer conjunto P, temos $\varphi \subset P$ ou $P \supset \varphi$. Lemos assim:
Para qualquer conjunto P, temos o conjunto vazio que está contido em P, ou P contém o conjunto vazio. Logo:

- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
- Qualquer conjunto é subconjunto de si próprio.

Igualdade entre conjuntos:
Observa os seguintes exemplos:
Se A=$\{2,4,6,8,10,....\}$
e B= $\{x : x \text{ é um número par}\}$ dissemos que A=B $(A\,é\ igual\ a\ B)$ou
Se A= $\{a,b,c,d\}$ e B= $\{c,b,a,d\}$ dissemos que A=B;
Mas se A=$\{1,2,3,4,5\}$ e B=$\{1,2,3,5\}$ dissemos que $A \neq B$ $(A\ e\ diferente\ de\ B)$.

Amigo, você deve sempre lembrar-se que:
A relação de pertença é feita entre elemento e conjunto.
As relações de inclusão, exclusão e igualdade são feitas entre conjuntos.

2. Operações com conjuntos.
Amigo, quando falamos de operação lembramos logo de adição, subtracção, divisão, multiplicação entre números, saiba que também é possível operar conjuntos. Essas operações recebem nomes diferentes, como União de conjuntos, Intersecção de conjuntos, Diferença de conjuntos, Conjunto complementar.

Todas estas operações são representadas por símbolos diferentes, veja a representação de cada uma delas.

2.1- Reunião ou União de conjuntos

Consideremos os dois conjuntos: A = {b, l, o, g, i, e} e B = {b, v, i, l, c, h, e}

Podemos pensar num novo conjunto C, constituído por aqueles elementos que pertencem a A **ou** que pertencem a B. No exemplo em questão esse novo conjunto é:

C = {b, l, o, g, v, i, c, h, e}

Amigo,repare que o conjunto C foi formado a partir dos conjuntos A e B, onde os elementos repetidos (os que estão em A e em B) foram escritos apenas uma vez, e dizemos que se trata da reunião (ou união) do conjunto A com o conjunto B. A reunião (ou união) de **A** e de **B** (ou de **A** com **B**) é usualmente representada por A U B e logo teremos:

A U B = {b, l, o, g, v, i, c, h, e}

Esse exemplo sugere-nos a seguinte definição geral para a reunião de conjuntos.

Definição 1. Dados dois conjuntos quaisquer **A** e **B**, chama-se ***união*** ou ***reunião*** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um desses conjuntos (podendo, evidentemente, pertencer aos dois), isto é, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B.Assim simbolicamente teremos:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos: {1; 2} U {3; 4} = {1; 2; 3; 4}

{n, e, w, t, o, n} U {h, o, r, t, a} = {a, e, h, n, o, r, t, w}

A definição 1 nos diz que um elemento x pertencer a **A U B** é equivalente a dizer que uma das proposições "x pertence **A**" ou "x pertence a **B**" é verdadeira. Desse fato decorre que:

$$A \subset A \cup B \quad \text{e} \quad B \subset A \cup B$$

Propriedades da União

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então são verdadeiras as seguintes propriedades:

1-Idempotência: A U A = A -> A união de um conjunto qualquer A com ele mesmo é igual a A;

2-Comutativa: A U B = B U A;

3- Elemento Neutro: Ø U A = A U Ø = A -> O conjunto Ø é o elemento neutro da uniãode conjuntos;

4-Associativa: (A U B) U C = A U (B U C).

2.2. Intersecção de conjuntos

Seja A o conjunto dos eleitores que votaram em David Simango para Presidente do Município da cidade de Maputo e B o conjunto dos eleitores que votaram Telmina Paixão para Governadora da Província de Maputo, nas eleições de 2004. É certo supor que houve eleitores que votaram simultaneamente nos dois candidatos. Assim somos levados a definir um novo conjunto, cujos elementos são aqueles que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Esse novo conjunto nos leva à seguinte definição geral.

Definição 2. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chamaremos intersecção de A e de B (ou de A com B) a um novo conjunto, assim definido:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \quad e \quad x \in B\}$$

Exemplos:

. $\{1;2\} \cap \{3;4\} = \varnothing$
. $\{n,e,w,t,o,n\} \cap \{h,o,r,t,a\} = \{o,t\}$

Da definição de intersecção resulta que:

$$(\forall x \in U)\ x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$$
$$(\forall x \in U)\ x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$$

Os fatos acima nos diz que A intersecção B é um subconjunto de A e de B, ou seja:

$$A \cap B \subset A$$
$$A \cap B \subset B$$

Propriedades da Intersecção

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então são verdadeiras as seguintes propriedades:

1. Idempotência: $A \cap A = A$

2. Comutativa: $A \cap B = B \cap A$

3. Elemento Neutro – O conjunto universo U é o elemento neutro da intersecção de conjuntos:
$A \cap U = A$

4. Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demonstração da propriedade associativa:

O conjunto do primeiro membro da igualdade é constituído pelos elementos x pertencentes a U tais que (por definição):

$$x \in A \quad e \quad x \in (B \cap C) \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \quad e \quad (\underbrace{x \in B}_{q} \quad e \quad \underbrace{x \in C}_{r})$$

onde na segunda passagem foi utilizada, novamente, a definição de intersecção entre os conjuntos B e C. Tendo em vista que a proposição p ^ (q ^ r) tem o mesmo valor lógico da proposição (p ^ q) ^ r vem que esse conjunto é constituído por elementos de U tais que:

$$(\underbrace{x \in A}_{p} \quad e \quad \underbrace{x \in B}_{q}) \quad e \quad \underbrace{x \in C}_{r} \Rightarrow x \in A \cap B \quad e \quad x \in C$$

Assim, fica demonstrado que o primeiro conjunto da igualdade está contido no segundo. Para concluir a demonstração, isto é, provar que o segundo conjunto está contido no primeiro, é só seguir o caminho inverso
Quando dois conjuntos quaisquer A e B não têm elemento comum, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos. Em outras palavras, dois conjuntos são disjuntos quando a intersecção entre eles é igual ao conjunto vazio.

Propriedades da União e Intersecção
Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, então valem as seguintes propriedades que inter-relacionam a união e intersecção de conjuntos:

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Note que a propriedade 3 é a distributiva da união em relação à intersecção e a 4 a distributiva da intersecção em relação à união.

Diferença entre conjunto

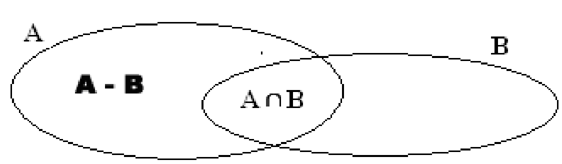
Seja A o conjunto dos eleitores que votaram em David Simango para Presidente do Município da cidade de Maputo e B o conjunto dos eleitores que votaram em Namburete para o mesmo Município, nas eleições de 2004. É certo pensar que teve eleitores que votaram em Simango mas não votaram em Namburete. Logo, Isto nos leva ao conjunto dos elementos de A que não são elementos de B.

Definição 3. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chamaremos a diferença entre A e B o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \ \ e \ \ x \notin B\}$$

Exemplos:
{a, b, c} – {a, c, d, e, f} = {b}
{a, b} – {e, f, g, h, i} = {a, b}
{a, b} – {a, b, c, d, e} = Ø

Antes de prosseguirmos apresento, a título de ilustração, um diagrama de Euler-Venn com os conceitos até aqui tratados, onde a diferença corresponde à parte branca de A, a intersecção à parte cinza claro e a união à essas duas partes mais a cinza escuro.



Note que as propriedades 1. e 2. acima podem ser facilmente visualizadas nesse diagrama.

Complementar de B em A

Definição 4. Dados os conjuntos A e B quaisquer, **com B contido em A**, chama-se complementar de B em relação a A o conjunto A – B, e indicamos como:

$$C_A^B = \overline{A} = A - B$$

Exemplos:

- A = {a, b, c, d, e, f} e B = {a, b} => complementar: A – B = {c, d, e, f}
- A = B = {1} => complementar: A – B = Ø

Observe que nos exemplos acima a condição para que o complementar de B em relação a A esteja definido é cumprida (B contido em A).

Propriedades da Complementação

Sendo B e C subconjuntos de A, valem as propriedades a seguir:

1. $C_A^B \cap B = \varnothing$ e $C_A^B \cup B = A$
2. $C_A^A = \varnothing$ e $C_A^{\varnothing} = A$
3. $C_A^{C_A^B} = B$
4. $C_A^{(B \cap C)} = C_A^B \cup C_A^C$
5. $C_A^{(B \cup C)} = C_A^B \cap C_A^C$

Vamos demonstrar apenas a primeira parte da propriedade 1. As demais deixo como exercício, me colocando à disposição para sanar eventuais dúvidas.

Da definição de intersecção de conjuntos e do complementar temos que:

$$C_A^B \cap B = \{x \in U \mid x \in C_A^B \ \text{ e } \ x \in B\} =$$
$$= \{x \in U \mid x \in A \ \text{ e } \ \underbrace{x \notin B \ \text{ e } \ x \in B}_{=\varnothing}\} =$$
$$= \{x \in U \mid x \in A \ \text{ e } \ \varnothing\} = \varnothing$$

Tarefas resolvidas

- Relações entre conjuntos (inclusão e exclusão)

1- Considera o conjunto:

$$A = \{\text{números inteiros menores que } 8\}$$

1.1- Representa em extensão, usando chavetas, o conjunto A:

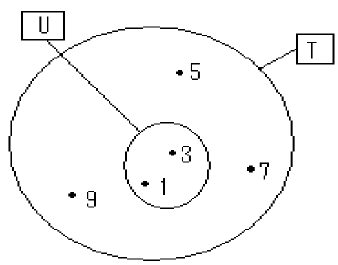
1.2- Usa um dos símbolos $\subset, \not\subset, ou \supset$ para obter afirmações verdadeiras:

$\{2,3\}$..... A A.... $\{0,1\}$ $\{2,3,8\}$.....A $\{8\}$....A $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$....A

2. Na figura ao lado estão representados os conjuntos T e U por meio dum diagrama de venn:

2.1 Representa por extensão, o conjunto T, usando chavetas:

2.2- Representa em compeensão o conjunto U:



2.3- Completa com um dos símblos $\subset, \not\subset ou \supset$:

$\{1,3\}$.......T	$\{1,9\}$
$\{1,3\}$......U	$\{1,9\}$.......U
$\{5,9\}$......T	$\{\ \}$.........T
$\{5,9\}$......U	$\{1,3,5\}$.....U

Resolução

1.1- $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

1.2- $\subset;\supset;\not\subset;$ falta um simbolo

2.1- T= $\{1,3,5,7,9\}$

2.2- U= $\{\text{números ímpares menores que } 5\}$

2.2- $\subset;\subset;\subset;\not\subset;\subset;\not\subset;\subset;\subset$

- Operações com conjuntos**:**

1- Das representações seguintes, a representação de um conjunto é:

A- # $\{4,8,10\}$ **B.** $\{8,4,10\}$ **C.** 4,8,10

2- A representação em **extensão** do conjunto dos números inteiros maiores que 12 e menores que 17 é:

A $\{12,13,14,15,16\}$ B- $\{13,14,15,16\}$ C- $\{13,14,15,16,17\}$

3- A representação em **compreensão** do conjunto $\{8,10,1214,16\}$ é:

A- $\{numeros\ pares\ maiores\ que\ 6\ e\ menores\ que\ 18\}$

B- $números\ pares\ maiores\ que\ 10$

C- $\{números\ pares\ menores\ que\ 17\}$

4- Das afirmações, a seguir indicadas, a verdadeira é:

A- $9 \notin (195)$ B- 8 = 3 x 3 C- $7 \in \{6, 8x3, 2\}$

5- Considera os conjuntos:

$E = \{14,16,18,20,22,24\}$ H= $\{numeros\ pares\ maiores\ que\ 14\ menores\ que\ 26\}$

A representação de $E \cap H$ é:

A- $\{numeros\ pares\ menores\ que\ 26\}$ B- $\{numeros\ pares\ maiores\ que\ 16\ e\ menores\ que\ 26\}$

C- $\{numeros\ pares\ maiores\ que\ 12\ e\ menores\ que\ 26\}$

6- Dados os conjuntos: M= $\{5,7,9\}$ N= $\{2,3,4,5,7,9\}$

A representação de $M \cup N$ é:

A- $\{2,3,4,5,7,9\}$ B- $\{2,3,4,9\}$ C- $\{2,9\}$

7- Em qual dos casos os conjuntos J e L são disjuntos?

A- $J \cap L = J$ B- $J \cap L = \{\ \}$ C- $J \cap L = L$

8- Das afirmações, indicadas, a falsa é:

A- $4 \in \{numeros\ pares\}$ B- $\{239\} = \{2,3,9\}$ C- 43 – 14 = 2 x11

RESOLUCAO:

1 – A representação de conjunto é B

2- é B 3- é A 4- é A 5- é B 6- é A 7- é B 8- é A

Tarefas não resolvidas

Resolve os exercícios:

1-Dados os conjuntos:

A= $\{3,5,7,9\}$ B=$\{7,9,11\}$ C= $\{11,13,15,17\}$

Determine:

a) $A \cup B$ b)$B \cup C$ b) $A \cup C$ c) $A \cup B \cup C$ d) $A \cup (C \cup B)$

2-observe os conjuntos:

D= $\{a,b,c,d,e,f,g,i,j\}$ E= $\{a,c,e,g,i\}$ F= $\{b,e,g,i,j,d\}$ G=$\{b,f,e,j\}$

-Calcule e represente os através do diagrama de Venn.

a) $D \cap E$; b) $E \cap G$; c) $D \cap E \cap F$

3- Sendo A= {1,2,3,4,5} indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

a) $4 \in A$; b) $2 \notin A$; c) $1 \in A$; d) $4 \subset A$; e) $A \supset 3$; f) $7 \in A$

4- Escreva, nos parênteses, (V) para as afirmações verdadeiras e (F) para as falsas.

a) ( ) $\{a,b\} \neq \{b,a\}$ b) ( ) $\{a,e\} = \{a\}$ c) ( ) $10 = \{10\}$ d) ( ) $10 \in \{10\}$

e) ( ) $4 \in \{4\}$ f) ( ) $4 \subset \{4\}$ g) ( ) $\phi = \{0\}$ h) ( ) $\phi = \{\ \}$

5- Considere os conjuntos:

G = $\{\text{numeros naturais menores que } 8\}$ H= $\{4,6,8,10\}$

5.1 Represente por extensão, através de chavetas e do diagrama de venn, os conjuntos

$G \cup H$.

6-Ddos os conjuntos: C={a,b,m,n,p}; B= { f,g,h,i,j,o,q,m,n }

A=$\{a,b,c,d,e\}$; D= $\{f,i,j,q\}$

Calcule e faça os respectivos diagramas de:

a)A-B; b) B-A ; c) A-C ; d) B-D

7-Dado o conjunto A=$\{a,b,c,d,m,n\}$, escreva o conjunto de:

a) B=$\{a,b,c,d\}$ em relação a A ;

b) C= $\{a,m,n,\}$em relação a A ;

c) D=$\{a,b,c,d,m,n\}$em a A

d) E = $\{\ \}$em relação a A

e) F= $\{1,2,a\}$em relação a A

8-O exercício que se segue coloca entre parênteses a letra correspondentes, de modo que os elementos da esquerda sejam associados aos da direita.

1- ( ) A$\cap B$

2- ( ) A$\cup B$

(A) Diferença entre conjuntos (B) Intersecção (C) conjunto complementar (D) Reunião ou União

3- ( ) B falta o traço por cima do B!!!!!

4- ( ) A-B

9-A empresa comercial Maputo Shoping Center tem um cofre forte, cujo o segredo só é de conhecimento de alguns funcionários . Para o não esquecerem recorrem a um código:

- Conjunto das letras comuns às palavras **Sol e Lua.**

-Conjunto reunião dos algarismos dos números 152 e 615.

-Letra, seguida dos algarismos formando o menor número possível.

Agora vamos descobrir o segredo**!**

Seja:

A= {Letras da palavra Sol} = { S, O,L} B= { Letras da palavra Lua} = { L,U,A}

A$\cap$B= { Letras da palavra Sol **e** Lua = { L} C = {Algarismos do número 152}= {1,2,5}

D = {Algarismos do número 615} = { 6,1,5}

C $\cup$D = {algarismos dos números 152 **ou** 615} = {1,5,2,6}

Logo o segredo do cofre é: **L1256**

Parte II

Equações quadráticas, paramétricas simples e biquadradas

Objectivos específicos

São objectivos específicos para esta parte os seguintes:

- Diferenciar uma equação paramétrica da não paramétrica;
- Resolver uma equação quadrática paramétricas simples;
- Identificar equações biquadráticas;
- Resolver uma equação quadrática simples;

- Resolver problemas práticos conducentes a uma equação biquadrada.

Conteúdos

Sim. É isso mesmo não deverá avançar para novos conteúdos sem antes rever o que já aprendeu nas classes e ou lições anteriores. Pois estes conteúdos são a base para o compreensão e domínio dos novos conteúdos. Para esta parte faça a revisão dos conteúdos abaixo. Em caso de dificuldades já sabe tem apoio no CAA.

Conteúdos para revisão

Faça a revisão sobre a matéria que estudou na 9ª classe como por exemplo:

- Resolução de equações lineares;
- Equações quadráticas;
- Funções quadráticas.

Pronto, agora pode avançar se não tiver dúvida., Mas, não se esqueça como se estuda Matemática, nem dos momentos que te propomos logo no início deste guião.

Vamos de novo estudar as equações quadráticas pois, você não esgotou os vários tipos de equações quadráticas na 9ª classe, além disso vai precisar bastante destas para aplicar na resolução dos problemas de outras matérias que vai aprender ao longo da sua formação na área da matemática mesmo nas outras áreas como física, química e desenho etc.

Novos conteúdos

- Equações quadráticas;
- Equações paramétricas simples;
- Equações biquadradas.

Equações quadráticas

Você deve resolver vários exercícios da matéria da 9ª classe recomendada para sua revisão.

1) $x^2 - 3x = 0$

Resolução

$x^2 - 3x = 0$

Coloque em evidência o factor comum x

$x(x-3) = 0$

Resulta um produto de factores igual a zero, é condição necessária que um deles seja igual a zero, matematicamente escreve-se:

Portanto: $x = 0$ ou $x - 3 = 0$

Teremos duas soluções a primeira $x_1 = 0$ e a segunda $x_2 = 3$

2) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Resolução

Factorize o trinómio do segundo grau segundo a regra que conhece

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

Logo teremos $(x+2)(x+3) = 0$

Resulta um produto de factores igual a zero, é condição necessária que um deles seja igual a zero.

Portanto: $x + 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$

Teremos duas soluções uma $x_1 = -3$ e a outra $x_2 = -2$

Considerando os coeficientes do trinómio, a equação também pode ser resolvida aplicando a fórmula resolvente seguinte:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Onde a expressão sob o sinal de radical designa-se por Δ portanto, $\Delta = b^2 - 4ac$

Sabe-se que : $a = 1$, $b = 5$ e $c = 6$ na equação:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 - 1}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

Vamos agora considerar as equações paramétricas e equações biquadradas. Acompanhe com atenção a resolução, poderá descobrir que a resolução destas novas equações está relacionada com a resolução das equações quadráticas que acabamos de ver.

3) Dada a equação, $x^2 + 3x + k = 0$, resolva a equação dada de modo que $k = 0$

Resolução

se $k = o \Rightarrow x^2 + 3x = 0$

cálculos

$\Rightarrow x^2 + 3x + 0 = 0$ para $k = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ ***s ol :*** *x = 0 x = -3*

4) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

A resolução deste tipo de equações é muito simples pois, elas se reduzem sempre a equações quadráticas já conhecidas.

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Vamos introduzir uma nova variável para reduzir a equação dada à equação quadrática

seja $t = x^2 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$

Agora podemos resolver a equação, factorizando o polinómio $(t-3)(t-2) = 0$

Para que produto seja igual a zero um dos factores deve ser zero, teremos:

$(t-3) = 0 \vee (t-3) = 0 \quad t = 3 \vee t = 2$

Mas o nosso objectivo é determinar o valor de x que satisfaz a igualdade, voltemos para o primeiro passo, sabe-se que :

$t = x^2$

Assim:

$t = 3 \vee t = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \vee x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{3} \vee x = \pm\sqrt{2}$

Temos deste modo a solução da equação dada.

Resumo teórico

Definição

Equação quadrática é toda equação polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ onde a≠0 a, b e c são números reais e recebem o nome de coeficientes.

Lei de anulamento do produto

Um produto A.B de factores é nulo se e só se um deles, pelo menos , for zero. Se A=0 0u B=0 ou ambos iguais a zero.

A equação quadrática também pode ser resolvida aplicando a fórmula resolvente que é :

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Designa-se a expressão sob o radical por $\Delta = b^2 - 4ac$ e chama-se discriminante.

$\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta > 0$ teremos duas soluções distintas

$\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta < 0$ não teremos soluções em R

$\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta = 0$ teremos duas soluções iguais

Equações paramétricas simples

Definição

Quando a equação quadrática , para além da incógnita considerada contém outra variável, denominada parâmetro diz-se **paramétrica**.

<u>Exemplo</u>: $kx^2 + kx - 4 = 0$ de modo que a equação seja possível e indeterminada.

Equações biquadradas

O que será equação biquadrada ?

Bastante simples, você já conhece o conceito geral de uma equação, portanto a equação é uma igualdade que envolve polinómios. No caso em que o polinómio envolvido é de grau 2 chamamos a equação de equação quadrática, neste caso concreto o nosso polinómio será trinómio de grau 4.portanto, teremos um termo do 4º grau, um do 2º grau e um termo independente .

Definição

Define-se equação biquadrada como a equação incompleta do quarto grau, que, após efectuadas todas as reduções possíveis, contém apenas termos onde a incógnita está submetida a expoentes de grau par.

E desse modo, podemos escrever a forma geral da equação biquadrada como:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ onde $a \neq 0$, a, b e c são números reais.

A resolução deste tipo de equações é muito simples pois, elas se reduzem sempre a equações quadráticas.

Exemplos: $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ $\qquad$ $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

Como resolver a equação biquadrada?

Para resolver equações biquadradas, recorre-se a introdução de uma nova variável como por exemplo:

Para $ax^4 + bx^2 + c = 0$ substituindo $x^2 = t$, teremos $at^2 + bt + c = 0$ (equação quadrática) encontrados os valores de t_1 e t_2 ,volta-se a variável inicial "x" e consequentemente, as raízes da equação.

Tarefas resolvidas (Equações quadráticas)

Resolva as seguintes equações

1) $x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-5)(x-1) = 0$

$(x-5) = 0 \vee (x-1) = 0$

$x_1 = 5 \vee x_2 = 1$

2) $x^2 + 22x + 121 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 22^2 - 4.121 = 484 - 484 = 0$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais iguais

$$\Rightarrow \left\{ x_1 = x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-22 + \sqrt{0}}{2} = \frac{-22}{2} = -11 \right.$$

3) $3x^2 + 15x + 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4.3.7 = 325 - 84 = 231$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais distintas

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-15 - \sqrt{241}}{2.3} = \dfrac{-15 - 15,52}{6} = -\dfrac{30,52}{6} = 5,086 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-15 + \sqrt{241}}{2.3} = \dfrac{-15 + 15,52}{6} = \dfrac{0,52}{6} = 0,086 \end{cases}$$

4) $-3x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.(-3).\frac{1}{4} = 1 + 3 = 4$

$\Rightarrow \Delta > 0$ significa que temos duas raizes reais distintas

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{4}}{2.(-3)} = \dfrac{-1 - 2}{-6} = -\dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + \sqrt{4}}{2.(-3)} = \dfrac{-1 + 2}{-6} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

5) $\frac{x}{6}=\frac{6}{15-x} \Leftrightarrow \quad x(15-x)=36 \;\Leftrightarrow -x^2+15x-36=0$

$$\Delta=b^2-4ac=225-144=81$$

$$x_1=\frac{-15-\sqrt{81}}{-2}=\frac{-15-9}{-2}=12$$

$$x_1=\frac{-15+\sqrt{81}}{-2}=\frac{-15+9}{-2}=3$$

6) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{34}{15}$

$$15(x+a)^2+15(x-a)^2 \Leftrightarrow 15(x^2+2ax+a^2)+15(x^2-2ax+a^2)=34(x^2-a^2)$$

$$15x^2+30ax+15a^2+15x^2-30ax+15a^2-34x^2+34a^2=0$$

$$30x^2-34x^2+64a^2=0 \Leftrightarrow 64a^2-4x^2=0$$

$$(8a+2x)(8a-2x)=0 \Rightarrow 8a+2x=0 \vee 8a-2x=0$$

$$2x=8a \vee -2x=8a \quad x_1=\frac{8a}{2}$$

Equações paramétricas

1).Determinar o valor de **m** para o qual o valor mínimo da função**:**

$y=x^2-5x+m$ seja $-\frac{1}{4}$

Neste caso temo: **a =**1, b = -5 e c = m

Resolução:

Calculando Δ

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4.1.m \Rightarrow \Delta=25-4m$

Sabemos que o valor mínimo é $\frac{-\Delta}{4a}$ assim:

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{-(25-4m)}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$-25+4m=-1$$

$$-25+4m=-1$$

$$4m=-1+25$$

$$4m=24$$

$$m=6$$

2). $2x^2 + (m + 3)x + m - 1 = 0$; é uma equação quadrática em ordem a <u>x</u> tendo como parâmetro m.

a) Indique os seus coeficientes .

b) determine o valor de m de modo que a equação tenha uma raiz dupla.

<u>Resolução</u>

2. a) $a = 2 \quad b = m+3 \quad c = m - 1$

b) condição $\Delta = 0 \quad \Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 4.2(m-1) = 0$ não há raízes reais

cálculos:

$$\Delta = 0$$
$$(m+3)^2 - 4.2(m-1) = 0$$
$$m^2 + 6m + 9 - 8m + 8 = 0$$
$$m^2 - 2m + 17 = 0 \qquad \Rightarrow \ \Delta = 4 - 4.17 = -64$$

3. Dada a equação, $x^2 + 3x + k = 0$

a) Determine k de modo que a equação admita reais iguais.

b) Determine k de modo que o produto seja positivo.

<u>Resolução</u>

a) se k = o $\Rightarrow x^2 + 3x = 0$

cálculos

$\Rightarrow x^2 + 3x + 0 = 0 \quad$ para $k = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x = 0 \ \Rightarrow \ x(x+3) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

s ol : $x = 0 \quad x = -3$

b) condição: $\Delta = 0 \quad k = 9/4$

cálculos

$$\Delta = 0$$
$$3^2 - 4.1.k = 0 \Rightarrow 9 - 4k = 0 \ \Rightarrow \ k = \frac{9}{4}$$

c) $\Delta \ \geq 0$ para que as raízes existam e $p > 0$ para que o produto seja positivo

cálculos

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - 4k > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \ k \in \left]0; \frac{9}{4}\right]$$

4.Determinar o valor de **m** para o qual o valor mínimo da função**:**

$y = x^2 - 5x + m$ seja $-\frac{1}{4}$

Neste caso temo: **a =**1, b = -5 e c = m

<u>Resolução</u>:

Calculando Δ

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4.1.m \Rightarrow \Delta = 25 - 4m$

Sabemos que o valor mínimo é $\frac{-\Delta}{4a}$ assim:

$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{-(25-4m)}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow -25 + 4m = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -25 + 4m = -1 \Rightarrow 4m = -1 + 25 \Rightarrow 4m = 24 \Rightarrow m = 6$

Equação biquadrada

Resolva as equações biquadradas

1) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

seja $x^2 = m \Rightarrow 4m^2 + 3m - 1 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$m_1 = \frac{1}{4} \vee m_2 = -1$

$\Rightarrow x_1^2 = \pm\frac{1}{2} \vee x_2^2 = -1$

$(x \in \Phi)$

Solução 1 $\{\pm\sqrt{3}\,;\pm\sqrt{2}\}$; Solução 2 $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ seja $x^2 = t \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \\ t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

se $t = 1 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$

se $t = 2 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\sqrt{2}$ e $x_4 = \sqrt{2}$

3) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$ seja $x^2 = y$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \\ y_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{cases}$$

para $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

para $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -2 \qquad x_4 = 2$

4) $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$

$x^4 + 6x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 + 6x^2 - 16 = 0$ seja $x^2 = k$

$$\Rightarrow k^2 + 6k - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{-6+10}{2} = 2 \\ k_2 = \dfrac{-6-10}{2} = -8 \end{cases}$$

para $k = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

para $k = -8$ (Im possivel em R)

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$

A seguir, resolva os exercícios que se seguem para medir o seu grau de compreensão dos conteúdos que acabamos de ver

Tarefas não resolvidas (Equações quadráticas)

1) $4x^2 + 4x - 5 = 0$ 2) $-8x^2 + 6x + 9 = 0$ 3) $20 - 2x^2 = 4x$

4) $5x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 2 = 0$ 5) $-x^2 + \sqrt{5}\,x - 3 + \sqrt{2} = 0$

6) $3x + (x+1)^2 + x^2 = 2(x^2 - 1) + x(x+3)$

7) $x = \dfrac{1}{x}$ 8) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{6}{15 - x}$ 9) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x+6}{x^2 - 4} = 0$

Equações paramétricas

1. Determinar os valores de m para que a função definida por $y=-x^2+mx-7$ tenha $\text{Im}(f)=\{y\in R \setminus y\leq 2\}$

2.Determinar o valor de m para que a função $y=2x^2-mx+6$ seja crescente para $\{x\in R\setminus x>2\}$

3.Determinar o valor de m para que a função $y=x^2-mx+5$ seja decrescente para. $\{x\in R\setminus x\leq 3\}$

4. Determinar o valor de m para o qual o valor mínimo da função $y=x^2-6x+m$ seja – 4.

5. Determinar os valores de m para que a função definida por $f(x)=x^2-mx$ tenha:

a) $\text{Im}(f)=\{y\in R\setminus y\geq -9\}$ b) $\text{Im}(f)=\{y\in \geq 4\}$

Equações biquadradas

1) $x^4-16=0$ 2) $3x^4-75=0$ 3) $x^4-8x^2+16=0$ 4) $x^4-6x^2+10=0$

5) $(x^2+10)(x^2-10)+36=0$ 6) $x^4-\frac{x^2-5}{4}=\frac{x^2+5}{3}$ 7) $x^4-18x^2+81=0$

Parte III

Funções Quadráticas

Objectivos específicos

- .Identificar a função quadrática.;
- .Determinar domínio, contradomínio, zeros da função, vértice da parábola, variação da função (monotonia), variação do sinal da função e equação da simetria;
- .Determinar expressão analítica de função Quadrática a partir do gráfico;
- .Representar graficamente as funções Quadráticas

Conteúdos

Caro estudante, você não deverá avançar para novos conteúdos sem antes rever o que já aprendeu nas classes e/ou lições anteriores. Pois estes conteúdos são a base para a compreensão e domínio dos novos conteúdos. Para esta parte, faça a revisão dos conteúdos abaixo. Em caso de dificuldades já sabe, tem apoio no CAA.

Conteúdos para revisão

- As operações com polinómios
- Estudo completo da função linear (1°grau)
- Resolução de equações quadráticas.

Novos conteúdos

- função quadrática;
- Conceito de função quadrática;
- Estudo completo da função quadrática $y=ax^2$;
- função quadrática do tipo $y=ax^2+c$;
- Representação gráfica da função $y=a(x-p)^2$ a partir de $y=ax^2$;
- Estudo completo da função quadrática $y=ax^2+c$;
- Estudo completo da função quadrática $y=ax^2+bx+c$

  a) caso $y=a(x-p)^2$;

  b) caso $y=a(x-p)^2+q$;

  c)caso $y=ax^2+bx+c$
- Representação gráfica da função quadrática $y=ax^2+bx+c$ a partir da determinação do vértice e dos zeros da função
- Expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico;
- Uso de tabelas trigonométricas;
- Resolução de problemas práticos envolvendo funções quadráticas;

1. Funções Quadráticas.

Materiais necessários: **Livro de Matemática, material de geometria como régua, esquadro**,...

Faça a revisão sobre algumas funções lineares do tipo $y=ax$ e $y=ax+b$ Como os que se seguem como : $y = 2x$ $y = 2x +3$ $y = \frac{1}{3}x - 2$ etc; de certeza que vai se recordar de alguns conceitos como o domínio e contradomínio da função, o gráfico deste tipo de funções bem como do significado da ordenada na origem.

Pronto, **agora pode avançar se não tiver dúvidas neste capítulo**.

- Ler com muita atenção e concentração uma ou duas vezes as definições envolvidas no texto sobre funções Quadráticas.
- Aplicar o conhecimento adquirido sobre o significado dos coeficientes **a** e **c** na construção de gráficos das funções quadráticas.
- Segundo o mesmo processo das funções lineares, represente graficamente as funções quadráticas.
- Em seguida analise o comportamento do gráfico obtido estude o domínio, contradomínio, variação da função e do sinal da função.

Resumo Teórico

No estudo de uma função quadrática é importante:

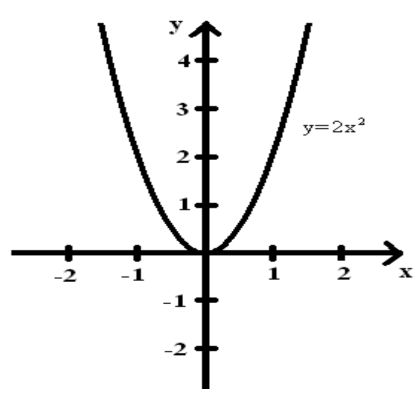
Definir o domínio: o domínio de todas as funções quadráticas é **R** pois são funções polinomiais.

Neste capítulo estudou as funções do tipo: $y=ax^2$ **,** $y=ax^2$ **+ c** $y=ax^2$ **+bx,** $y=a(x-p)^2$ **;** $y=a(x-p)^2$ **+q ou** $y=ax^2$ **+bx+ c.**

$\boxed{y=ax^2+bx+c}$ **a, b**, e **c** pertencentes a R é a forma geral da função quadrática.

Estudar partindo do gráfico de $y=ax^2+bx+c$, o significado dos coeficientes **a** e **c**

Segundo o mesmo processo das funções lineares, represente graficamente a função quadrática por exemplo $y=2x^2$, você já domina as operações com polinómios, de certeza vai fazer os cálculos e traçar o gráfico correspondente sem dificuldades :

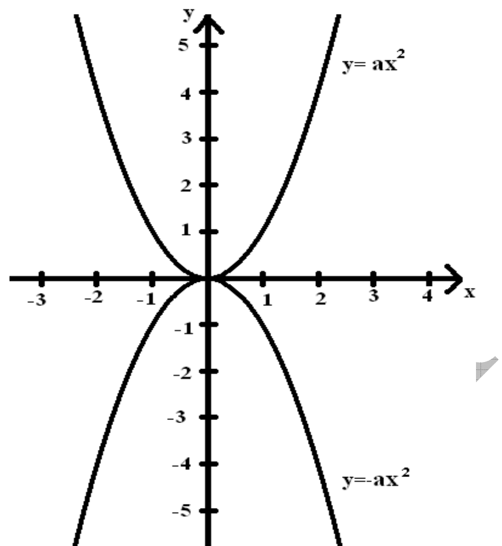


Em seguida analise o comportamento do gráfico obtido estude o domínio, contradomínio, variação da função e do sinal da função.

a) <u>Significado do coeficiente **a**</u>

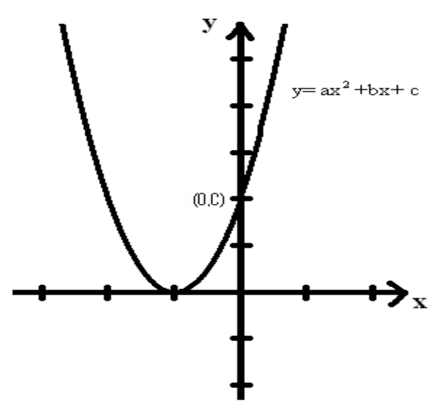
Se **a** é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.
Quanto maior for o valor de a, menor é o afastamento em relação ao eixo oy.

Se **a** é negativo a parábola está voltada para baixo.
O gráfico da função $y=ax^2$ é simétrico ao gráfico da função $y=-ax^2$ em relação ao eixo ox.

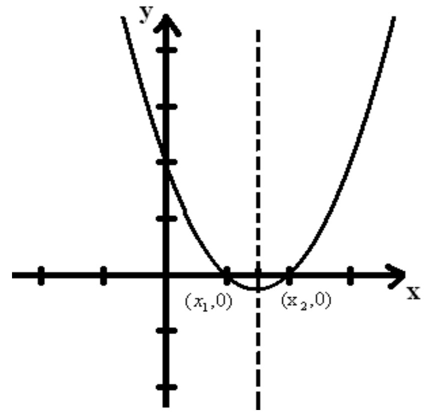


<u>Significado do coeficiente **c**</u>

O coeficiente **c** na função $y=ax^2+bx+c$ é a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo oy.

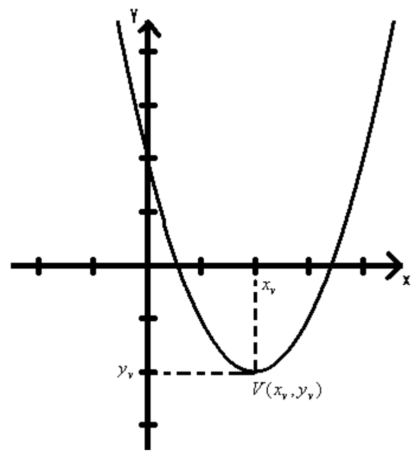


Zeros da função $y = ax^2 + bx + c$,são os pontos de intersecção da parábola com o eixo ox, nestes pontos a função anula-se isto é, o valor de y é igual a zero $ax^2 + bx + c = 0$,como você já sabe dos capítulos anteriores trata-se de uma equação quadrática cuja solução existe quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é maior ou igual a zero, caso Δ seja menor que zero, a equação não tem solução, isto significa que a parábola não vai intersectar o eixo ox.



Vértice da parábola é o ponto de intersecção da parábola com o eixo de simetria que é dado por $V(x_v;y_v) = V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ ou

$$V(x_v;y_v) = V\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ a(x_v)^2 + b(x_v) + c\right).$$



- Você pode construir o gráfico da função quadrática bastando conhecer os seguintes elementos:

1.Zeros da função
2.Vértice da parábola
3.Eixo de simetria
4.O ponto (0 ; c)

- A partir do gráfico (parábola) é possível determinar a expressão analítica da função que originou a parábola ,bastando para isso observar e fazer a leitura do gráfico baseando-se nos elementos indicados no item anterior.

- Para construir o gráfico da função $y = a(x - p)^2$ é necessário fazer a translação do gráfico da função $y = ax^2$ à esquerda ao longo do eixo ox no valor **p** se **p** for um número positivo, e à direita se **p** for um número negativo.

- Determinação da expressão analítica duma função a partir do gráfico

Você precisa fazer a leitura do gráfico representado e daí descobrir os dados (valores conhecidos) através das intercessões com os eixos (zeros da função) e o vértice da parábola. A seguir irá aplicar as expressões que definem esses pontos com base na fórmula resolvente.

$$V(x_v;y_v)=V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) \quad \text{ou} \quad V(x_v;y_v)=V\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ a(x_v)^2+b(x_v)+c\right)$$

E a expressão analítica geral do 2º grau

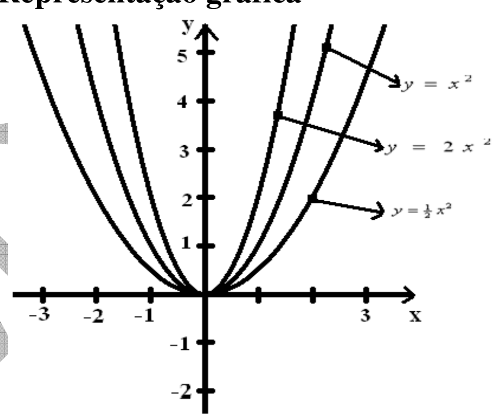
$f(x)=ax^2+bx+c$, equivalente a $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Tarefas resolvidas

1.Represente no mesmo S.C.O os gráficos das seguintes funções e faça o estudo completo de cada uma delas.

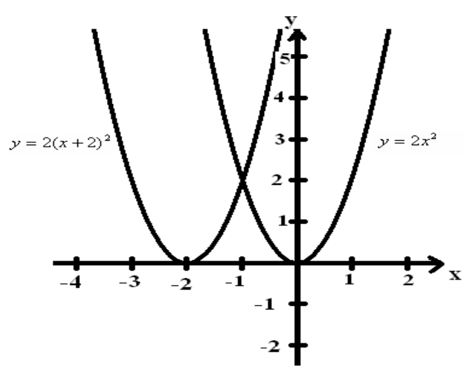
$y=\frac{1}{2}x^2$; $y=x^2$ e $y=2x^2$

Representação gráfica

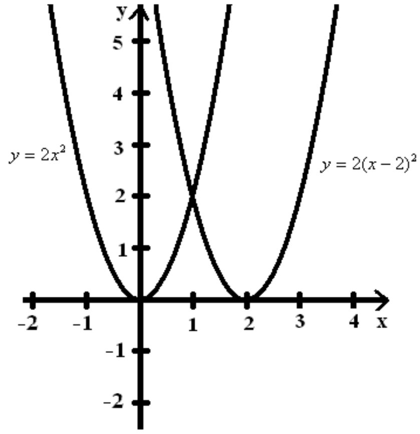


2.Represente no mesmo S.C.O os gráficos das seguintes funções e faça o estudo completo de cada uma delas

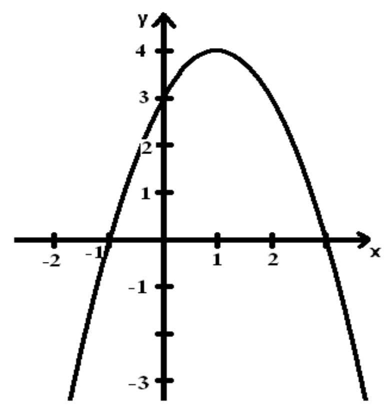
$y=2x^2$ e $y=2(x+2)^2$



3.Represente no mesmo S.C.O os gráficos das seguintes funções $y = 2x^2$ e $y = 2(x+2)^2$



4.Determine a expressão analítica da seguinte função quadrática



São dados os zeros da função: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

E as coordenadas de um ponto da parábola (4;-5)

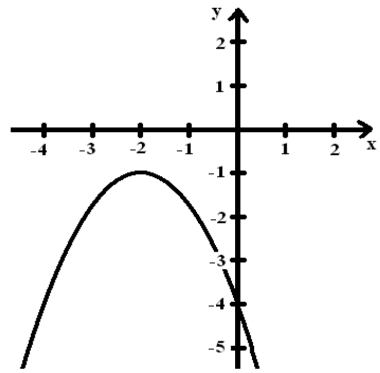
$f(x) = ax^2 + bx + c$, equivalente a $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ então, $f(x) = a(x+1)(x-3)$ e, substituindo pela coordenada (4; -5) , temos $-5 = a(4+1)(4-3)$

, equação a partir da qual se calcula o valor do coeficiente <u>a</u>
$-5 = 5a \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$

Logo: $f(x) = -(x+1)(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$ é a expressão analítica do gráfico representado

2.Determine a expressão analítica do gráfico representado



Na figura representada não são conhecidos os zeros da função mas temos dados suficientes para calcular a expressão analítica, a saber:

Coordenadas do vértice: V(1;2) e um ponto da parábola bem visível p(0; -4),
Sabendo que a expressão analítica para qualquer parábola é $f(x)=ax^2+bx+c$
Que pode-se transformar em $y=a(x-p)^2+q$ onde $p=x_v$ e $q=y_v$, neste caso p = -2 e q = -1, teremos:

$f(x)=a(x+2)^2-1$
Considerando p(0; -4) e substituindo na expressão acima ,obtemos:

$-4=a(0+2)^2-1 \Leftrightarrow -4a=3 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{4}$

Logo:
$f(x)=-\frac{3}{4}(x+2)^2-1$ $\quad f(x)=-\frac{3}{4}(x^2+4x+4)-1$ $\quad f(x)=-\frac{3}{4}x^2-3x-4$

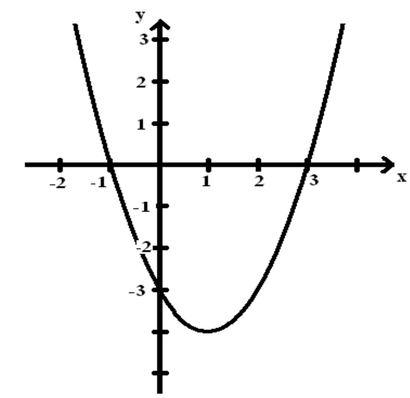
$f(x)=-\frac{3}{4}x^2-3x-4$ é a expressão analítica do gráfico representado

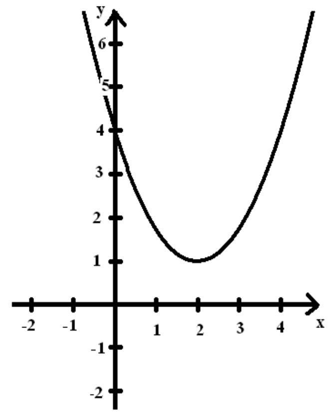
Tarefas não resolvidas

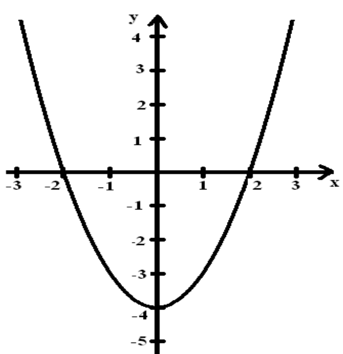
1. represente graficamente as seguintes funções

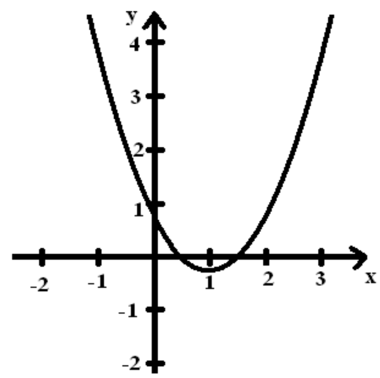
$y=f(x)=-2x^2$ e $y=f(x)=-2(x+3)^2+4$

2. Determine as expressões analíticas das seguintes funções quadráticas









Secção II

Parte -I

Inequações Quadráticas

Objectivos específicos

Sim. São objectivos específicos para este módulo os seguintes:

1. Identificar as Inequações quadráticas.;
2. Resolver graficamente as inequações Quadráticas
3. Resolver analiticamente as inequações Quadráticas

Conteúdos

Amigo Estudante. Não deverá avançar para novos conteúdos sem antes rever o que já aprendeu nas classes e ou lições anteriores. Pois estes conteúdos são a base para o compreensão e domínio dos novos conteúdos. Para esta parte faça a revisão dos conteúdos abaixo. Em caso de dificuldades já sabe tem apoio no CAA.

Conteúdos para revisão

- Resolver equações quadráticas.
- Resolver analiticamente as inequações 1˚ grau
- Representar a solução da inequações 1˚ grau na recta graduada e sob notação de intervalos.

Pronto. Já fez a revisão, agora pode estudar os conteúdos abaixo. Mas não se esqueça de como se estuda Matemática, nem dos momentos que te propomos logo no início deste guião.

Novos conteúdos

♪ Inequações quadráticas;

- Conceito de inequação quadrática;
- Resolução gráfica de uma inequação quadrática;
- Resolução analítica de uma inequação quadrática;

Abordagem dos conteúdos

Materiais necessários : **Livro de Matemática, material de geometria como régua, esquadro**

Introdução

É importante Saber que a diferença entre equações e inequações é apenas o sinal que liga os dois membros, de **igualdade** para as equações e **desigualdade** para as inequações.

Exemplos: $x-5<2$, $x+\sqrt{x}+8\geq 0$, $\frac{1}{x}-2\leq x^2$, $x^2-3x+2>0$ $-x^2\geq -5$,

$x^3-4x^2-5x\leq 0$, $x^4-5x^2+4\leq o$

Numa inequaçao, ao multiplicar-se ambos membros por – 1 ,o sinal de desigualdade muda.

Por exemplo: -3x -6 > 2 multiplicando por – 1 , tem-se 3x + 6 < -2

Agora , vamos considerar apenas as inequações quadráticas isto é, de grau 2.

Resumo Teórico

Inequações quadráticas:

- As inequações quadráticas diferem das inequações lineares pelo grau dos polinómios envolvidos que é 2 (dois), mantendo que:

1. A ligação das expressões polinomiais pelo símbolo de desigualdade
2. Numa inequaçao, ao multiplicar-se ambos membros por – 1 ,o sinal de desigualdade muda.

Exemplos de inequações quadráticas:

a) $x^2-3x+2>0$ *b)* $-x^2\geq -5$ *c)* $(x^2-4)(x^2-6x+5)>0$

f) $\frac{x+1}{x-1}<\frac{x-1}{x+1}$ *g)* $\frac{x^2+6x-16}{-x^2+3x-2}\geq 0$

Definição

inequação quadrática é toda a inequação do tipo $ax^2+bx+c\leq 0$ ou $ax^2+bx+c\geq 0$ com $a\neq 0$ e **a, b** e **c** são números reais.

Equivalência de inequações

Duas inequações dizem-se equivalentes quando o conjunto solução de uma é também da outra e vice-versa

Exemplos;

$-x+2>0 \Leftrightarrow x<2$

São duas inequações equivalentes.

Resolução de inequações quadráticas

- Ao multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo o sinal da desigualdade muda.
- Existem dois métodos para resolver uma inequação quadrática:
- As Inequações podem ser resolvidas pelo **método analítico ou método gráfico**
- Ao conjunto de todos elementos do universo que transformam a inequação numa proposição verdadeira chama-se **conjunto solução ou solução da inequação.**

1. Método gráfico

A simples interpretação do gráfico da função quadrática permite reconhecer propriedades que simplificam muito a resolução de determinadas inequações.

Não iremos mostrar os diversos tipos de gráficos representativos de funções quadráticas, mas você já domina esta matéria de certeza, mesmo assim poderá em caso de dúvida revisitar esta matéria sobre o estudo de funções quadráticas. Poderá concluir da análise que se faz sobre o comportamento destas funções que:

A função quadrática toma sempre o sinal de <u>a</u> fora do intervalo dos zeros

1.Método Gráfico

$-x^2 + 5x < 6$

1°) passo: Reduzir a inequação à forma canónica $ax^2 + bx + c < 0$

$-x^2 + 5x - 6 < 0$

Bastando para isso passar o **6** para o 1° membro da inequação trocando-lhe o sinal conforme a propriedade de qualquer equação bem como de inequação .

2°) passo: Como o **<u>a</u>** é um valor negativo convém multiplicar a inequação por (-1) o que implica a mudança (troca) do sinal de desigualdade de < para > .

Assim: $x^2 - 5x + 6 > 0$

3°) passo: Construir o gráfico da função $y = x^2 - 5x + 6$

a) Zeros da função :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b-\Delta}{2a} = \frac{5-\sqrt{1}}{2.1} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\Delta}{2a} = \frac{5+\sqrt{1}}{2.1} = \frac{5+1}{2} = 3$$

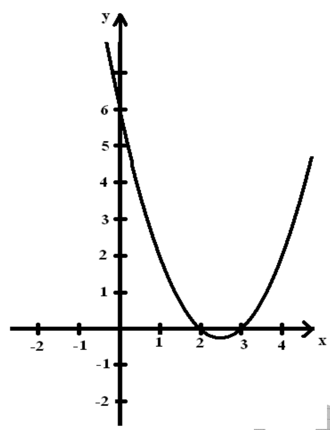
b) Vértice da parábola

$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$; $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$

c) Eixo de simetria $x = \frac{5}{2}$

d) ponto de intersecção da parábola com eixo oy (0 ; 6)

e) traçar a parábola

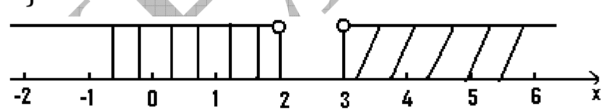


f) Estudar o sinal da função:

y toma valores positivos fora do intervalo entre os zeros da função e valores negativos no intervalo entre os zeros da função.

g) Determinar a solução da inequação:

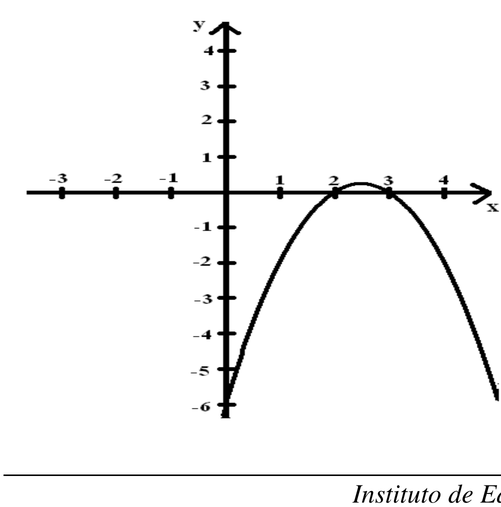
$S = \{x \in R \setminus x < 2 \text{ ou } x > 3\}$



No sob notação: $x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

NB: se você não tivesse multiplicado a inequação por -1 no segundo passo podia trabalhar com **a** negativo o que implicaria a parábola voltada, mas a solução seria a mesma pois seria $y > 0$, veja a seguir como seria:

$-x^2 + 5x - 6 < 0$



$\Delta = 25 - 24 = 1$ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$

$x_v = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$ $y_v = \frac{-1}{4(-1)} = \frac{1}{4}$

$x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

Já viu como a solução é a mesma? Mas é sempre bom evitar trabalhar com números negativos quando pode contornar a situação.

2.Método analítico

Conhecendo os zeros da função que as raízes da equação correspondente $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, então só factorizar o trinómio:

a) Pela disjunção de condições

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$(x-2)(x-3) > 0$

$1^a)\ \begin{cases} x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>3 \end{cases}$

$s_1 = \{x \in R \setminus x > 3\}$

$2^a)\ \begin{cases} x-2<0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<3 \end{cases}$

$s_1 = \{x \in R \setminus x < 2\}$

b) Usando o quadro de sinais:

$-\infty$		**2**		**3**	$+\infty$
X - 2	_	**0**	**+**	**+**	**+**
X- 3	_	_	_	**0**	**+**
P	**+**	**0**	_	**0**	**+**

Tarefas resolvida

Neste caso, vamos estudar a variação do sinal de $x^2 - 3x + 2 > 0$

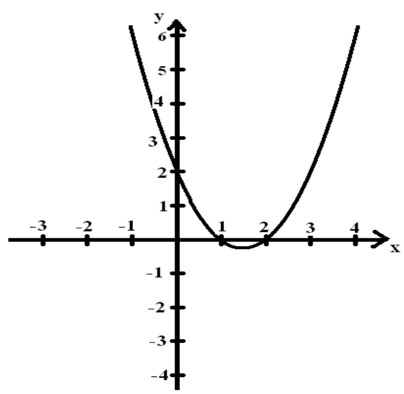
Como a = 1 é positivo , a função será positiva (o sinal de a) fora do intervalo dos zeros. Determinemo-los, sabendo que:

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$

$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$; $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$



A função é:

negativa em $]1,2[$

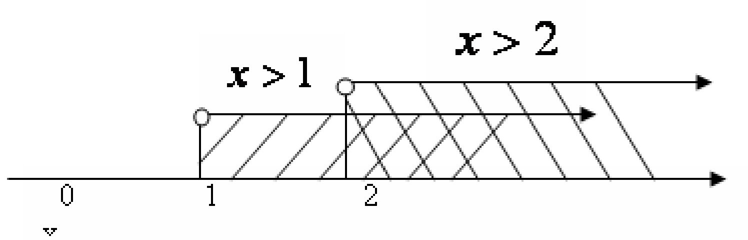
nula em $\{1,2\}$

positiva em $]-\infty;1[\cup]2;\infty[$

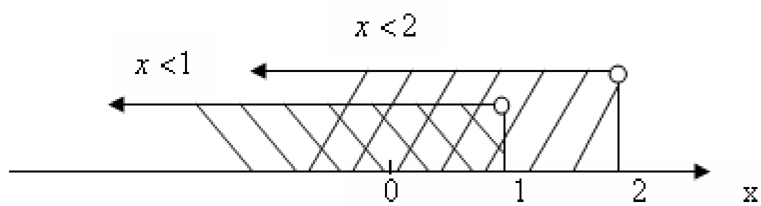
Pelo método analítico teremos

se x = 1 e x = 2 então , teremos:
$x^2 - 3x + 2 > 0$
$(x - 1)(x - 2) > 0$
Como o produto é positivo temos duas condições:

1. condição: (x – 1 > 0 e x -2 > 0)



2. condição (x – 1 < 0 e x – 2 < 0)



Destas condições resulta que
Solução 1 $x \in]2, +\infty[$
Solução 2 $x \in]-\infty, 1[$
Solução final $S = S_1 \cup S_2 = x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x -1	-	0	+	+	+
x - 2	-	-	-	0	+
(x-2).(x-1)	+	0	-	0	+

Facílimo, mas nunca se esqueça que sempre que multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo, o sinal de desigualdade muda

c) $x^3 - 4x^2 - 5x \leq 0$

o método analítico para as inequações polinomiais de grau superior a 2 é mais cómodo vejamos os procedimentos:
começamos por achar as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$ são x = 0 , x = 5 , x = -1
factorizar o polinómio envolvido: $x^3 - 4x^2 - 5x = x(x - 5)(x + 1)$
construa agora a tabela de valores para o estudo do sinal dos factores ao do eixo real.

Tabela

x	$-\infty$	-1		0		5	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
x^2- 4x -5	+	0	-	-	-	0	+
P	-	0	+	0	-	0	+

Solução : S= $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,5\right]$

e) $\frac{x+1}{x-1}<\frac{x-1}{x+1}$

Bonito, estamos perante uma inequação fraccionária, não fique alarmado porque você possui requisitos para resolver a inequação, siga os seguintes passos:

1º passo

determinar o domínio de existência

Domínio : x – 1 $\neq 0$ $\wedge$ x + 1 $\neq 0$ $\Rightarrow$ x $\neq$ 1 $\wedge$ x$\neq$ -1 $\Rightarrow x\in \ R-\{\pm 1\}$

2 º passo

Reduzir as fracções ao denominador comum ,mais atenção, nestes casos ,depois de achar o m.m.c o denominador deve se manter.

(x- 1) (x + 1)

$$\frac{x+1}{x-1}<\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}<\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

3 º passo

Reduzir os termos semelhantes do numerador

$$\frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}<\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}\Rightarrow\frac{4x}{(x+1)(x-1)}<0$$

4 º passo

Achar as raízes se 4 x =0 então x = 0 e -1 < 0 < 1 ., pela condição de existência (domínio).

Muito bem, você esta a caminhar bem , construir a tabela de sinais

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
4x	-	-	-	0	+	+	+
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x-1	-	-	-	-	-	0	+
P	-	0	+	0	-	0	+

a solução será S = $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,1\right[$

Inequações produto do segundo grau

1. $(x^2-4)(x^2-6x+5)>0$

A resolução deste tipo de inequação pode ser facilitada aplicando o método analítico com a utilização de quadro de sinais.
Para o preenchimento deste quadro temos que em primeiro lugar, determinar os zeros de cada um dos factores.

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x_1=-2 \vee x_2=2$

$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x_1=1 \vee x_2=5$

<u>Quadro de sinais</u>
Como preencher o quadro de sinais ? basta tomar como base a propriedade da função quadrática (tomar sempre o sinal de **a** fora do intervalo dos zeros).

x	$-\infty$	-2		1		2		5	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+	+	+
x^2-6x+5	+	+	+	0	-	-	-	0	+
P	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Atendendo esta propriedade e preenchido o quadro, pode-se concluir que:

$(x^2-4)(x^2-6x+5)>0$

$x \in]-\infty;-2[\cup]1;2[\cup]5;+\infty[$

2.Resolver a inequação

$(x^2-5x)(-x^2+7x-6)>0$

<u>Resolução</u>:

Seja $f(x)=x^2-5x$ e $g(x)=x^2+7x-6$

$F(x) = x^2 - 5x \iff x_1 = 1 ; x_2 = 5$

$g(x)=-x^2+7x-6 \Leftrightarrow x_1=1 ; x_2=6$

Montar um quadro de sinais para as duas funções f(x) , g(x) e f(x).g(x)

x	$-\infty$	0		1		5		6	$+\infty$
x^2-5x	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$-x^2+7x-6$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
P	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Como queremos $(x^2-5x)(-x^2+7x-6)>0$, vamos tomar os intervalos marcados com sinal positivo (+)

Solução:

$x \in]0;1[\cup]5;6[$

Agora realize as tarefas que se seguem para medir o grau de assimilação da matéria.

Tarefas não resolvidas

1.Resolver a inequação $-x^2 + x + 6 < 0$ a solução: $x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$

2. **.Resolver a inequação pelo método analítico**

$x^2 - 3x - 4 > 0$ solução: $x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$

3. Resolver a inequação

$x^2 + 4x + 4 > 0$ Solução: $x \in]-\infty, -2] \cup]-2, +\infty[$

4.Resolver a inequação

$-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$ Solução: $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

PARTE- II

Equações, Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Introdução

Amigo Estudante. Nesta parte irá estudar as equações e inequações exponenciais que estão ligadas às funções exponenciais com um papel de destaque na Matemática pois, são instrumentos eficazes na abordagem de problemas reais ou imaginados e por fornecerem formas eficientes de estudá-las. Também irá estudar as equações e inequações logarítmicas que são muito importantes na resolução de problemas de diferentes disciplinas como a química, Física e geografia entre outras.

Objectivos específicos

- Identificar equações exponenciais.;
- .Identificar inequações exponenciais;
- .Resolver as inequações exponenciais
- .Identificar equações logarítmicas.;
- .Resolver equações logarítmicas;
- .Resolver inequações logarítmicas

Antes de avançar para novos conteúdos deve rever o que já aprendeu nas classes e /ou lições anteriores. Pois estes conteúdos são a base para o compreensão e domínio dos novos conteúdos. Para esta parte faça a revisão dos conteúdos abaixo. Em caso de dificuldades já sabe tem apoio no CAA.

Conteúdos para revisão

- Equações lineares e quadráticas as operações com polinómios
- Estudo completo das funções linear (1°grau) e quadrática (2°grau).

Pronto. Já fez a revisão, agora pode estudar os conteúdos abaixo. Mas não se esqueça de como se estuda Matemática, nem dos momentos que te propomos logo no início deste guião.

Novos conteúdos

Função, Equações e Inequações exponenciais

- Função exponencial
- Conceito de equações exponenciais
- Conceito de inequações exponenciais
- Resolução de equações exponenciais
- Resolução de inequações exponenciais

Equações e inequações logarítmicas

- Função logarítmica
- Conceito de equações logarítmicas;
- Conceito de inequações logarítmicas;
- Resolução de equações logarítmicas
- Resolução de inequações logarítmicas

Resumo Teórico

Função exponencial

O que será a função exponencial?
Definição
Chama-se função exponencial de base a à toda aplicação
$f: R \to R^+ : x \to a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ **e escreve-se** $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$

a------- base da função exponencial
x------- variável independente
y------- variável dependente

representação gráfica da função exponencial

consideremos os exemplos seguintes :

$y = f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

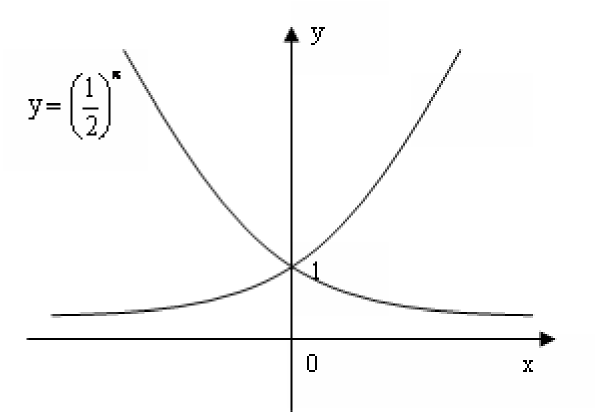
Podemos representar as duas funções no mesmo sistema cartesiano ortogonal

1° passo
Atribuir alguns valores ao x, em R seja : -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

2° passo
Calcular os valores de y a partir das funções 2^x e $(1/2)^x$ respectivamente

x	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Considerar um, S.C.O e marcar os pontos com as coordenadas x e y



Muito simples, basta aplicar a definição de potência para calcular os valores de y, a partir dos valores atribuídos ao x.

Propriedades da função Exponencial

- Domínio de existência é sempre $x \in R$
- Contradomínio é sempre $x \in R^+$
- Em qualquer base **a** o gráfico de f(x) intersecta o eixo dos y no (0; 1)
- Quanto à monotonia , a função é sempre:
  - crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$
  - decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

observando os gráficos representados no S.C.O , podemos verificar as propriedades da função
A representação gráfica das funções dadas é um exemplo clássico das propriedades que acabamos de ver, mas você deve considerar mais funções exponenciais e verificar as propriedades.

Existe uma função cujas características se relacionam com as da função exponencial
Você ja estudou esta função qual será**?** É função logarítmica

Função logarítmica

Definição

Dado $a \in R^+$ e $a \neq 1$, chama-se função logarítmica a função em que a variável $x \in R$ está associada a um logaritmo, isto é, $f(x) = \log_a x$; $x > 0$ ou $f : R^+ \to R : f(x) = \log_a x$ com a $\in R^+$; $a \neq 1$ e $x > 0$

Consideremos alguns exemplos desta função;

$Y = f(x) = \log_2 x \quad y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad y = f(x) = \log_4 x$

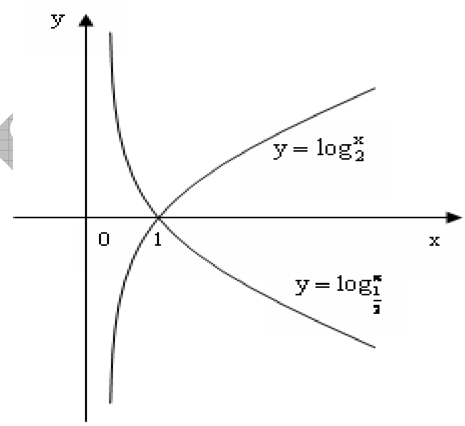
- Se a = 1 $\Rightarrow$ f(x) = logx diz-se logaritmo decimal
- No caso em que a base do logaritmo é 10 pode-se escrever: log x ou lg x

A função logarítmica também pode ser representada graficamente seguindo o mesmo processo da função exponencial

Consideremos os exemplos
$Y = f(x) = \log_2 x \quad y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	4	2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	2
$y = \log_2^x$	2	1	0	-3	-2	-1
$y = \log_{\frac{1}{2}}^x$	-2	-1	0	3	2	1

NB: pela definição de logaritmo x > 0 , significa que só podemos atribuir ao x valores positivos
Lembre-se que :
$\text{Log } x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \quad \text{com} \quad x > 0, \text{ e } 0 < a < 1 \quad \text{ou} \quad a > 1$



Podemos observar as seguintes propriedades:

- Domínio de existência é sempre x > 0 (o mesmo que $x \in R^+$)
- Contradomínio é sempre $y \in$ R
- Para qualquer base, o gráfico da função passa pelo ponto (1, 0)
- A função é sempre crescente quando:
  - crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$ ex: $f(x) = \log_2 x$
  - decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

ex: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Fazendo o estudo comparativo duas funções podemos concluir que :

1. Domínio de $f(x) = a^x$ é contradomínio de f(x) = logx e vice-versa
2. Os gráficos da função exponencial não intersectam o eixo dos y, mas sim eixo dos x no ponto p (0 ,1) enquanto os da função logarítmica intersectam o eixo dos x mas não intersectam o dos y no ponto p (1,0)
3. os pontos p (0,1) e p(1,0) são pontos simétricos em relação à recta y = x
4. As duas funções são crescente para a >1 e decrescentes para $0 < a < 1$

Conclusão : As funções exponencial e logarítmicas são inversas.

Equação exponencial.

O que será então a equação exponencial?

Definição

Simples, toda a igualdade em que a incógnita aparece como expoente é equação exponencial ou seja é a igualdade que envolve função exponencial

A resolução de equações que contém funções exponenciais exige um bom domínio das propriedades dessas funções.

Tais como :

1. Domínio da função exponencial e R
2. A função exponencial é positiva para todos os valores da base

3.Os valores da função exponencial $y = a^x$ são superiores a 1 se $\boxed{a > 1 \quad e \quad x > 0 \text{ e inferiores se } x < 0 \text{ e } 0 < a \le 1}$

Exemplos;

a) $2^x = 16$ b) $5^{x-1} = 25$ c) $2^{x-1} + 2^x = 48$

Fácil, você já conhece a definição de equação exponencial como uma igualdade que contém funções exponenciais, e sabe que uma inequação qualquer é uma desigualdade.

$a^m = a^p \quad \Leftrightarrow \quad m = p$

Equação logarítmica

A resolução de equações que contém funções logarítmicas exige um bom conhecimento das propriedades dessas funções.

Tais como :

Propriedades dos logaritmos,

- Log (a. b) = log a + logb (a >0 , b > 0)

- Log (a/b) = loga – logb (a >0 , b > 0)
- Log a^b =b.log a
- Cologarítmo colog a = - log
- Mudança de base $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; a- base antiga e c- base nova
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$

<u>NOTA</u> da definição do logaritmo segue que o número negativo não tem logaritmo
Domínio da função logarítmica e R^+

Na resolução de problemas com logaritmos as vezes é necessário a passagem da base do logaritmo para outra
através da fórmula: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ em particular se a = b teremos $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

1.) $\log_{0,3} x = 2 \Rightarrow (0,3)^2 = x \Rightarrow x = 0,09$ (pela definição do logaritmo D : x > 0

2) . $\log_3{}^2 x = 4 - \log_3 x$ Domínio : x > 0 introduzindo nova variável seja
$\log_3 x = y$
teremos $y^2 + 3y - 4 = 0$ é só resolver a equação quadrática.
Solução: para y = 1 $\Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow 3^1 = x$

Para y = -4 $\log_3 x = -4 \Rightarrow x = 3^{-4} \Rightarrow x = \dfrac{1}{81}$

Inequação exponencial

O que será então a inequação exponencial?
Fácil, você já conhece a definição de equação exponencial como uma igualdade que contém funções exponenciais, e sabe que uma inequação qualquer é uma desigualdade, então poderá entender a definição sem problemas

Definição :Inequação exponencial é toda a desigualdade que contém função exponencial

As inequações exponenciais gozam da propriedade:

1) $a^x > a^k \Rightarrow \begin{cases} x > k & se \quad a > 1 \\ x < k & se \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

Que também é propriedade da função exponencial?

Por isso ao compararmos as expressões com função exponencial, mantemos o sinal de desigualdade quando o valor de **a** é maior que 1 e trocamos o sinal de desigualdade quando o valor de **a** está entre 0 e 1.

2) Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

Consideremos os seguintes exemplos:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$ (como a > 1 portanto a = 3/2) teremos

$\left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x > 0$ Solução $x \in \left]0;+\infty\right[$

2) $2^x \leq 16 \Rightarrow 2^x \leq 2^4 \Rightarrow x \leq 4$ pois $a = 2 > 1$

Solução $x \in \left]-\infty\,;\,4\right]$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x \leq 2$

Solução $x \in \left]-\infty, 2\right]$ pois o valor de **a** está entre 0 e 1

O que será então, a inequação logarítmica?

Fácil, você já conhece a definição de equação logarítmica como uma igualdade que contém funções logarítmicas. e sabe que uma inequação qualquer e uma desigualdade, então poderá dar a definição sem problemas

As inequações logarítmicas gozam das seguintes propriedades:

$\log_a x, < k \Rightarrow \{x < a^k \;\; se \;\; a > 1 \;\; \wedge x > a^k \;\; se \;\; 0 < a < 1$

$\log_a x > k \Rightarrow \{x > a^x \;\; se\, a > 1 \wedge \;\; 0 < x < a^x \;\; se \;\; 0 < a < 1$

- A função logarítmica e crescente se a >1 e decrescente se
  0 < a < 1
- Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um
- número negativo o sentido de desigualdade muda.

Exemplo;

Resolva a inequação

$\log_{0,1}(2x+1) \geq -1$

Não se esqueça que à semelhança do que fizemos nas equações logarítmicas, temos que determinar em primeiro lugar o domínio de existência de cada função que faz parte da desigualdade (inequação) dada, e depois considerar como solução ,apenas os valores de x que pertencem a intersecção desses domínios .

$$\log_{0,1}(2x+1) \geq -1 \quad \Rightarrow$$
$$2x+1 \leq (0,1)^{-1} \quad \wedge \quad (2x+1) > 0$$
$$2x+1 \leq 10 \quad \wedge \quad 2x > -1$$
$$x \leq \frac{9}{2} \quad \wedge \quad x > -\frac{1}{2}$$

Solução $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right]$

Agora vamos resolver as tarefas que lhe propomos para que possa consolidar os conhecimentos que acaba de adquirir para o seu progresso.

Tarefas resolvidas

Funções exponenciais e logarítmicas

1. Faça o estudo das funções que se seguem

   a) $y = 3^x$ b) $y = (1/3)^x$

2. a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{10} x$

Equações exponenciais

1.resolva as equações

a) $2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

b) $5^{X-1} = 25 \Rightarrow 5^{X-1} = 5^2 \Rightarrow X - 1 = 2 \quad X = 3$

c) $2^{X-1} + 2^X = 48$ aplicando a propriedade $(a^m . a^p = a^{m+p})$

$2^x\left(1+\frac{1}{2}\right) = 48$ (colocar em evidência o factor comum 2^x)

$2^x\left(\frac{3}{2}\right) = 48 \Leftrightarrow 2^x = 48 . \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2^x = 16.\ 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$

d) $4^{2x+\frac{1}{2}} + 4^{2x-1} = 3^{2x+1} - 3^{2x+1} + 3^{2x} + 3^{2x-2}$

(aplicar a propriedade $a^m . a^p = a^{m+p}$)

$4^{2x} . 4^{\frac{1}{2}} + 4^{2x} . 4^{-1} = 3^{2x} . 3^2 - 3^{2x} . 3 + 3^{2x} + 3^{2x} . 3^{-2}$

$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-1}) = 3^{2x} (9 - 3 + 1 + \frac{1}{9})$

$4^{2x.} \frac{9}{4} = 3^{2x} . \frac{64}{9}$

$\frac{4^{2x}}{3^{2x}} = \frac{64 . 4}{9.9}$

(aplicando a propriedade $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$ no primeiro membro)

$(\frac{4}{3})^{2x} = (\frac{4}{3})^4$

(aplicando a propriedade $(a^m)^p = a^{m.p}$ no segundo membro)

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$ (igualar os expoentes)

e) $4^x - 2^x = 2$ (introduzir uma nova variável seja $t = 2^x$)
teremos :
$t^2 - t - 2 = 0$ (equação quadrática, resolver com base na factorização e depois a lei de anulamento ou aplicar a fórmula resolvente)

$(t - 2)(t + 1) = 0$
$t - 2 = 0$ ou $t + 1 = 0$
$t = 2$ ou $t = -1$
Solução : não se esqueça, estamos a procura do valor de x que satisfaz a igualdade,
Então :

para $t = 2 \Rightarrow 2 = 2^x \Rightarrow x = 1$

para $t = -1 \Rightarrow -1 = 2^x \Rightarrow$ Não tem solução

<u>Logaritmos</u>

1) Qual é o número cujo logaritmo na base 3 é 4 ?
R : $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow 3^4 = x \Leftrightarrow x = 81$

2) Determine a base do logaritmo de 7 cujo valor é ¼?
R : $\log_a 7 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 7 \Leftrightarrow (a^{\frac{1}{4}})^4 = 7^4 \Leftrightarrow a = 7^4$

3)Desenvolva cada logaritmo ,aplicando as propriedades

1.a) $\log_a a^2.b.c^3$

Resolução

1º passo: Aplicando a propriedade do logaritmo do produto:

$\log_a a^2 + \log_a b + \log_a c^3$

2º passo: Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência:

$2\log_a a + \log_a b + 3\log_a c$

3º passo: Aplicando a propriedade $\log_a a = 1$, teremos:

$2 + \log_a b + \log_a \mathrm{c}$

b) $\log_a \dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{b}}}{b.\sqrt[3]{a}}$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente

$\log_a\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right) - \log\left(b.\sqrt[3]{b}\right)$

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto na segunda parcela

$\log_a\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right) - \log_a b - \log_a \sqrt[3]{b}$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência de expoente fraccionário

Pois $\boxed{\sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}}$

$\log_a\left(a^3.\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_a b - \log_a b^{\frac{1}{3}} =$

$= \frac{3}{2}\log_a a + \frac{1}{4}\log_a b - \log_a b - \frac{1}{3}\log_a b$

Reduzir termos semelhantes e aplicar a propriedade $\boxed{\log_a a = 1}$

$= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{3}\right)\log_a b = \frac{3}{2} - \frac{13}{12}\log_a b$

c) $\log_a \dfrac{a^2.\sqrt{b}}{c.d^2}$

Temos logaritmo de um quociente como na alínea b, vamos repetir com atenção os passos `desta alínea.

$\log_a\left(a^2\sqrt{b}\right) - \log_a c.d^2 = 2\log_a a + \frac{1}{2}\log_a b - \log_a c - 2\log_a d$

$= 2 + \frac{1}{2}\log_a b - \log_a c - 2\log_a d$

d)

$$\log_3 \frac{3.\sqrt[4]{a.\sqrt[5]{a^{-1}}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}} = \log_3 3 + \frac{1}{4}\log_3\left(a.\sqrt[5]{a^{-1}}\right) - \frac{1}{3}\log_3 3 - \frac{1}{3}\log_3 \sqrt[3]{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 a - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\ \frac{1}{3}\log_3 3 = 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\log_3 a - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{7}{15} + \frac{1}{20}\log_3 a$$

2) calcule o valor de :

a) $\log_2 2^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log_2 2 = \frac{1}{5}$ (lembre-se que $\log_a a = 1$)

b) $\log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3}\log_5 5 = \frac{2}{3}$

c) $\frac{\log_2 16.\log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8} = \frac{4\ .\ \frac{1}{2}.\log_3 27}{3} = \frac{4\ .\frac{1}{2}.3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

(atenção, o logaritmo do produto e diferente do produto de logaritmos , por isso , temos que achar valor do logaritmo de cada factor no numerador e depois efectuar a divisão dos valores obtidos)

Equações logarítmicas

1) $\log_2(x+2) + \log_2(3x-4) = 4$

Neste caso, temos que determinar antes de mais nada o domínio de existência para evitar erros que possam surgir ao estendermos o domínio em todo o conjunto R .

o domínio de existência e $\{x \in R \setminus x+2 \wedge 3x-4\} = \left\{x \in R \setminus x > \frac{4}{3}\right\}$

$\log_2(x+2) + \log_2(3x-4) = 4$

$\log_2(x+2)(3x-4) = \log_2 16$ (aplicando logaritmo do produto)

$(x+2)(3x-4) = 16$ (aplicando a lei de anulamento do produto)

Teremos as seguintes soluções $x = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{3}$ destas duas soluções só uma e que satisfaz a igualdades porque considerando o domínio de existência x > 4/3 logo a solução é:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{73}}{3}$$

2) $\log x + \log_x 10 = 2{,}5$ 0 domínio $D = \{x \in |R|\ x > 0 \ \wedge x \neq 1\}$

$\log_x 10 = \frac{1}{\log x}$ pondo $y = \log x$ temos $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad y_2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{10} \quad x_2 = 100$

Esta claro que x_1 ; $x_2 \in D$

Solução : $x = \sqrt{10} \quad \wedge \quad x = 100$

3) $lg\left(x^2 - x - 6\right) + x = \lg \left(x + 2\right) + 4$

Domínio $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ x + 2 > \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$\lg\left(x^2 - x - 6\right) + \lg 10^x = \lg(x + 2) + \lg 10^4$

$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)\,10^4$ (visto que $x + 2 .> 0$)

$(x - 3)\,10^4 = 10^4$

Evidentemente $x = 4$ é raiz da equação. Porem provemos que não há mais raízes . teremos

$x - 3 = 10^{4-x}$

a) se $X > 4$ então $x - 3 > 1$ mas $10^{4-x} < 1$

b) se $x < 4$ então $x - 3 < 1$ mas $10^{4-x} > 1$

$S = \{-2, 6\}$

Inequações exponenciais

1 Resolva as seguintes inequações

$a)\ 7^{x-1} < 7^3$

Como a base da potência 7 maior 1 $(7 > 1)$

$7^{x-1} < 7^3 \Rightarrow x - 1 < 3 \Rightarrow x < 4$

$x \in \left]-\infty ; 4\right[$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x}{5}-3} \Rightarrow 2x - 1 \leq \frac{2x}{5} - 3 \Rightarrow 10x - 2x \leq -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x \leq -10 \Rightarrow x \leq \frac{-10}{8} \Rightarrow x \leq -\frac{5}{4}$

$c)\ (5^x)^2 - 6.5^x + 5 \le 0 \quad$ seja $5^x = y$; logo $(5^x)^2 = y^2$

$\Rightarrow \ y^2 - 6y + 5 \le 0$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{6-4}{2} = 1 \\ y_2 = \dfrac{6+4}{2} = 5 \end{cases}$$

$y \in [1;5]$

$$5^0 \le 5^x \le 5^1 \begin{cases} 5^0 \le 5^x \\ 5^x \le 5^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x \ge 5^0 \\ 5^x \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases}$$

solução: $x \in [0;1]$

2.Calcule os intervalos de x que satisfazem as seguintes condições:

1.) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 4^{x-1} \Rightarrow 4^{-x} < 4^{x-1}$

$\Rightarrow -x < x-1 \Rightarrow -2x < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

$x \in \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2.) $5^{x^2-5x} \le 1$

$5^{x^2-5x} \le 5^0$

$x^2 - 5x \le 0$

$x(x-5) \le 0$

$S_f = [0;5]$

3) $(0,1)^{6x^2-5x} \ge 10 \Rightarrow 10^{-6x^2+5x} \ge 10 \Rightarrow -6x^2 + 5x \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6x^2 + 5x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 \le 0$

$\Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$x_2 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

solução: $x \in [2;3]$

4) $3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{27} \Rightarrow 3^{x+1} < \dfrac{3^{8x^2}}{3^3} \Rightarrow 3^{x+1} < 3^{8x^2-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 < 8x^2 - 3 \Rightarrow -8x^2 + x + 4 < 0 \Leftrightarrow 8x^2 - x - 4 > 0$

$$\Delta = 1 + 128 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{129}}{16} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{129}}{16} \end{cases}$$

solucao: $x \in \left]-\infty ; \dfrac{1-\sqrt{129}}{16}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{129}}{16}; +\infty\right[$

Inequações logarítmicos

1.Qual dos números é maior ?

$a)\log_7 6 \quad e \quad \log_{0,7} 6 \qquad b)\log_7 6 \ e \quad \log_8 9$

Resolução

a) $\log_7 6 > 0$, se $\log_{07} 6 < 0 \Rightarrow \log_7 6 > \log_{0,7} 6$

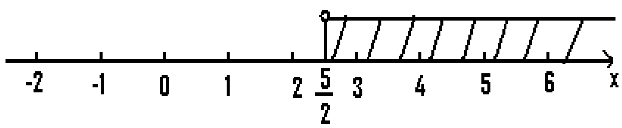
b) $\log_7 6 < \log_7 7 = 1$, se $\log_8 9 > \log_8 8 \Rightarrow \log_7 6 < \log_8 9$

2.resolva as inequações

b) $\lg(2x-5) + \lg(3x+7) > 4\lg 2$

domínio $2x - 5 > 0$ e $3x + 7 > 0 \Rightarrow x > 5/2 \quad x > -7/3$

eixo real



D : $x \in \left]5/2 ; +\infty\right[$

$\lg(2x-5(3x+7)) > \lg 2^4$

$(2x-5)(3x+7) > 16$

$6x^2 + 14x - 15x - 35 > 16$

$6x^2 - x - 51 > 0$

Agora, escolha o método mais fácil para resolver a inequação quadrática por exemplo a tabela de sinais

$\Delta = 1 - 4.6.(-51) = 1225$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 35}{12}$

$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -\dfrac{17}{6}$

tabela de sinais

x	$-\infty$	$-\frac{17}{6}$		3	$+\infty$
$x + \frac{17}{6}$	+	0	−	−	−
x - 3	_	_	_	0	+
P	_	0	+	0	_

solução $s = \left]-\infty ; -\dfrac{17}{6}\right[\cup \left]3 ; +\infty\right[$

A solução da inequação logarítmica será a intersecção do domínio da função logarítmica

$s_f = s \cap D_f = \left]3 ; +\infty\right[$

Atenção: Represente as soluções num eixo real para confirmar a solução da inequação

c) $\log_5(3x-1) < \log_5 x$

Resolução

1°) Condições de existência

$$\left.\begin{aligned} &3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3} \\ &x>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x>\frac{1}{3}$$

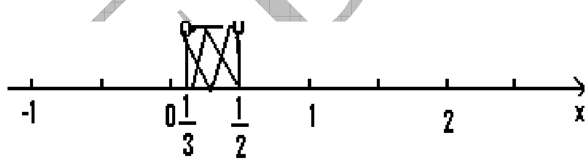
2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$\log_5(3x-1) < \log_5 x$

$$\begin{aligned} &3x-1<x \\ &3x-x<1 \\ &2x<1 \\ &x<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3°) Verificar se as soluções encontradas satisfazem a inequação, determinando a intersecção entre o resultado encontrado na inequação e a condição de existência.

Eixo real



$$S=\left\{x \in R \setminus \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\} \text{ ou } x \in \left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[$$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+2>\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

Resolução

1°) Condições de existência $\left.\begin{aligned} &x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ &2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+2 > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} > \log$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left[(x+2).\frac{1}{4}\right] > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$\Rightarrow (x+2).\frac{1}{4} < 2x$$

$$\Rightarrow x+2<8x-4$$

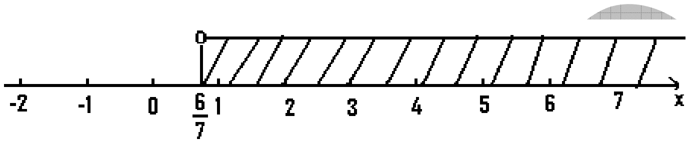
$$\Rightarrow x-8x<-2-4$$

$$\Rightarrow -7x<-6$$

$$\Rightarrow x> \frac{6}{7}$$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação

Eixo real



$$S=\left\{ x\in R \setminus x > \frac{6}{7}\right\} \text{ ou } \; x\in \left]7;+\infty\right[$$

$$\text{e)} \log_5(x-2)+\frac{1}{\log_{(x-3)}5} > \log_5 2$$

<u>Resolução</u>

1°) condições de existência

$$\left.\begin{array}{l} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x-3>0 \Rightarrow x>3 \\ x-3\neq 1 \Rightarrow x\neq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x>3 \;\text{ e }\; x\neq 4$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$\log_5(x-2)+\dfrac{1}{\log_{(x-3)}5} > \log_5 2$ Substituindo $\dfrac{1}{\log_{(x-3)}5}$ por $\log_5(x-3)$ Observação

$$\frac{1}{\log_{(x-3)} 5} = \frac{\log_{(x-3)}(x-3)}{\log_{(x-3)} 5} = \log_5(x-3)$$

$$\log_5(x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-2) + \log_5(x-3) > \log_5 2$$

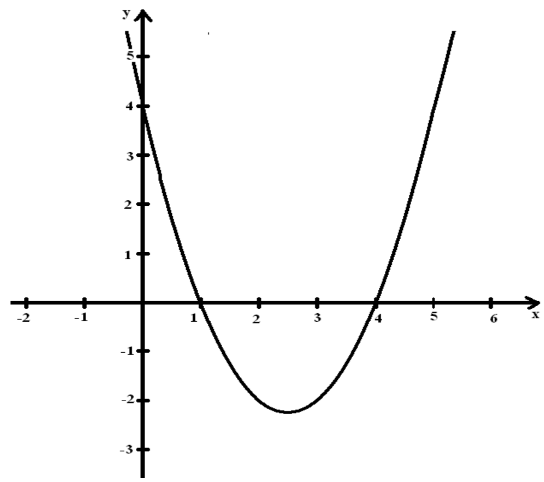
$$\Rightarrow \log_5(x-2)(x-3) > \log_5 2$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) > 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 2$$

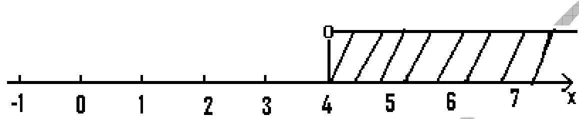
$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$$

$S = x \in]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$



3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação

Eixo real



$S = \{ x \in R \setminus x > 4 \}$ ou $x \in]4;+\infty[$

Tarefas não resolvidas

1.Resolva as equações

a). $4^x = 64$ b) $3^x = \frac{1}{81}$ c) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$ d) $7^{(x+1)(x-2)} = 1$

e) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ f) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$ g) $8^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$ h) $5^{x^2-2x} = 0{,}2$

1.Associe (V) verdadeiro ou (F) falso

$a)\log_3 5^6 = 6\log_3 5$

$b)\log_2 \sqrt[10]{3} = \frac{1}{10}\log_2 3$

$c)\log_2 3^8 = 3\log_2 8$

$d)\log_5 8 - \log_5 3 = \log_5 5$

2. Resolva as equações seguintes logarítmicas

a) $\log_{\frac{1}{5}} 1 = x$ **b)** $\log_4(2x-9) = \log_4 3$. **c)** $\log_4(x^2 - 2x) = \log_4(3x-6)$

d) $3\log_3 x + 2 = \dfrac{1}{\log_3 x}$ e) $\log(x+3) + \log 4 = \log x^2$

3.resolva as inequações exponenciais

a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 4^{x-1}$ b) $3^{4x-2} - 5.3^{2x-1} + 4 < 0$ c) $3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{27}$

4. Associe (V) ou (F)

$a)\ \log_{\frac{1}{6}} 5 > \log_{\frac{1}{6}} 25$

b) $\log_3 50 > \log_3 45$

$c)\ \log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 81$

5. Resolva as seguintes inequações

a) $\log_2(2x-5) < \log_2 6$ b) $\log_{\frac{1}{5}}(-x^2+5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4$ c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1$

d) $\log_2(x^2 - 6x) < \log_2 7$ e) $\log(3x-5) \le \log(x-1)$

Secção III

Trigonometria, Estatística e Geometria espacial

Parte I

Trigonometria

Amigo Estudante. Seja bem vindo ao quinto módulo. Aqui irá aprender muita trigonometria ou seja muita medição de triângulos que é o que significa trigonometria. Vamos então, enumerar os objectivos específicos, que deverá perseguir ao longo desta parte.

Objectivos específicos

Sim. São objectivos específicos para esta parte os seguintes:

1. Calcular as razões trigonométricas de um triângulo rectângulo;
2. Determinar um ângulo agudo, conhecida uma das razões trigonométricas;
3. Determinar as razões trigonométricas de ângulos especiais;
4. Relacionar as razões trigonométricas de ângulos complementares;
5. Determinar as razões trigonométricas aplicando a relação fundamental da trigonometria;
6. Determinar elementos de um triângulo rectângulo aplicando as razões trigonométricas;
7. Resolver problemas práticos associados a vida real;
8. Representar um ângulo qualquer num circulo trigonométrico;
9. Converter a medida de um ângulo de graus em radianos e vice-versa.

Conteúdos

Sim. É isso mesmo não deverá avançar para novos conteúdos sem antes rever o que já aprendeu nas classes e ou lições anteriores. Pois estes conteúdos são a base para o seu entendimento dos novos conteúdos. Para este módulo terá de fazer uma bos revisão dos três conteúdos abaixo. Em caso de dificuldades já sabe tem apoio no CAA.

Conteúdos para revisão

- Teorema de Pitágoras;
- Triângulos semelhantes;
- Critérios de semelhança.

Pronto. Já fez a revisão agora pode estudar os conteúdos abaixo. Mais não se esqueça de como se estuda Matemática, nem dos momentos que te propomos logo no início deste guião.

Novos conteúdos

♪ Razões trigonométricas de um ângulo agudo

- Razões trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente;
- Relações entre razões trigonométricas;

- Razões trigonométricas de ângulos especiais;
- Identidade fundamental da trigonometria;
- Uso de tabelas trigonométricas;
- Resolução de triângulos rectângulos e problemas envolvendo aspectos da vida real;
- Resolução de equações trigonométricas simples;

♪ Circunferência orientada

- Noção de círculo trigonométrico;
- Definição de razões trigonométricas no círculo;
- Variação do sinal de seno, coseno, tangente e cotangente nos 4 quadrante;
- Redução ao primeiro quadrante;
- Cálculo de valores das razões trigonométricas em qualquer quadrante;
- Noção de radiano;
- Relação entre sistema sexagesimal e circular;
- Resolução de equações trigonométricas do tipo $senx = a, \cos x = a,\ tgx = a,\ \cot gx = a$ sendo a $\in \Re$ em qualquer quadrante.

Abordagem dos conteúdos

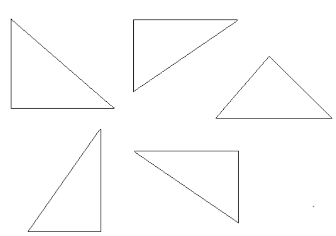
Caro aluno! Vamos considerar o exemplo abaixo para mostrar uma possível abordagem destes conteúdos

Exemplo . Razões trigonométricas: seno, coseno, tangente, co-tangente

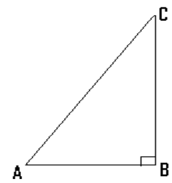
Matarias necessários : **Livro de Matemática, material de geometria como régua, esquadro**,...

Sim. Com o livro você deverá proceder como reza o primeiro momento do método que te apresentamos no início do guião.

- ❖ Ler com muita atenção e concentração uma ou duas páginas as definições envolvidas no texto sobre trigonometria, observar a sua importância e o seu significado tendo como ponto de referência as razões trigonométricas.
- ❖ Desenhe triângulos rectângulos como os que se seguem:

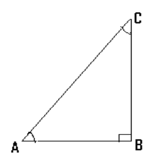


- m seguida escolha um deles e denomine os seus vértices como por exemplo:



- Recorde todos os elementos de um triângulo (lados, ângulos, catetos, hipotenusa, catetos adjacentes). Depois disso defina todas as relações trigonométricas. Faça isto muitas vezes com vários triângulos em posições diferentes mas antes se certifique de que são triângulos rectângulos.

Exemplo:



$$senA = \frac{BC}{AC} \quad \cos A = \frac{AB}{AC} \quad tgA = \frac{BC}{AB} \quad ctgA = \frac{AB}{BC}$$

$$senC = \frac{AB}{AC} \quad \cos B = \frac{BC}{AC} \quad tgB = \frac{AB}{BC} \quad ctgB = \frac{BC}{AB}$$

Sim. Não pare por aqui faça comparação entre as razões trigonométricas e tire conclusões. Se não conseguir chegar a nenhuma conclusão vai ao CAA e consulte ao Professor, e se tiver chegado a uma conclusão também apresente ao Professor e discuta com ele os seus avanços.

Agora leia o texto teórico que se segue para consolidar os conhecimentos adquiridos na tarefa anterior. Não se engane por te apressares na leitura deste texto antes da tarefa. O exemplo acima tratado mostra como pode com segurança realizar outras tarefas que te forem colocadas.

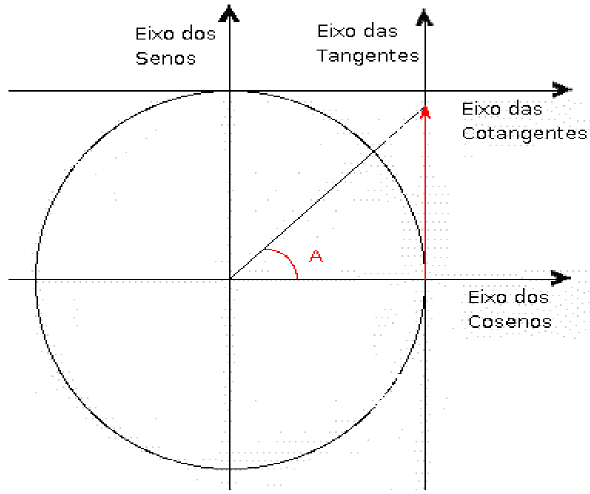
Material teórico

Trigonometria (do grego trigonon "triângulo" + metron "medida") é um ramo da matemática que estuda os triângulos, particularmente triângulos em um plano onde um dos ângulos do triângulo mede 90 graus (triângulo rectângulo).

Também estuda especificamente as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos; as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas.

Circulo trigonométrico

É uma circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem dos eixos de um plano cartesiano ortogonal.
Existem dois sentidos de marcação dos arcos no ciclo: **o sentido positivo**, chamado de anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco; e **o sentido negativo**, ou horário, que se dá no sentido contrário ao anterior.



Seno

Seno é a projecção no eixo vertical do segmento de recta que parte do centro do círculo trigonométrico e vai até a circunferência.

Como o seno é uma projecção, e esta projecção está no interior do ciclo trigonométrico e este possui raio unitário, segue que a imagem do seno é o intervalo fechado $[-1,1]$.

O seno de um ângulo agudo é a razão (divisão) entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa.

Co-seno

Co-seno é a projecção no eixo horizontal do segmento de recta que parte do centro do círculo trigonométrico e vai até a circunferência.

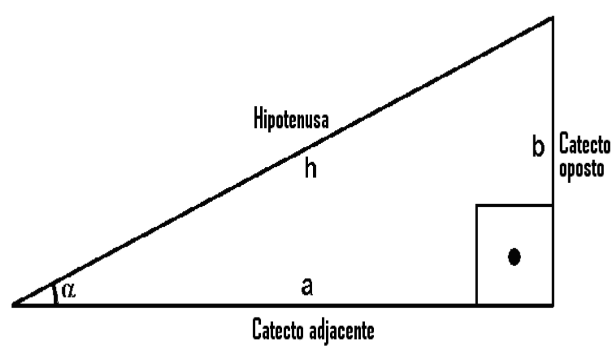
Como o co-seno é uma projecção, e esta projecção está no interior do ciclo trigonométrico e este possui raio unitário, segue que a imagem do cosseno é o intervalo fechado $[-1,1]$.

O co-seno de um ângulo agudo é a razão (divisão) entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipotenusa.

Tangente

Tangente é o segmento de recta formado entre o ponto de cruzamento de seu eixo com a recta definida pelo centro do círculo trigonométrico e o ângulo com sua origem.

A tangente de um ângulo agudo é a razão (divisão) entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.

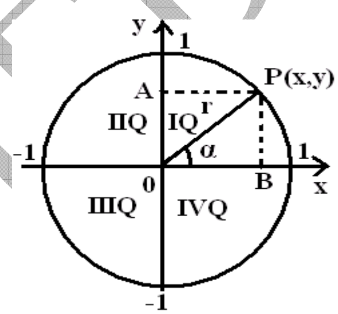


Razões trigonométricas de ângulos especiais

α	0^0	30^0 $\frac{\pi}{6}$	45^0 $\frac{\pi}{4}$	60^0 $\frac{\pi}{3}$	90^0 $\frac{\pi}{2}$
Senα	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
Cosα	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
Tgα	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**Não existe**
Cotgα	**Não existe**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Variação das razões trigonométricas nos 4 quadrante

Caro estudante vamos agora investigar o comportamento do sinal destas razões trigonométricas. Vamos primeiro considerar no circulo trigonométrico, um ângulo genérico **α , os pontos A, B e P .** Para facilitar a analise vamos considerar que $\text{sen}\alpha = \frac{PB}{r} = \frac{AO}{r} = \frac{y}{1} = y$ uma vez que o raio é unitário.



Para seno podemos facilmente verificar que os seus valores são localizados ao longo do eixo dos y e variam de 0 a 1 no primeiro(IQ) e no segundo(IIQ) quadrantes, isto é quando o ponto P se desloca ao longo do arco que cobre estes dois quadrantes. No IIIQ e IVQ o seno varia de **0** a **-1.**

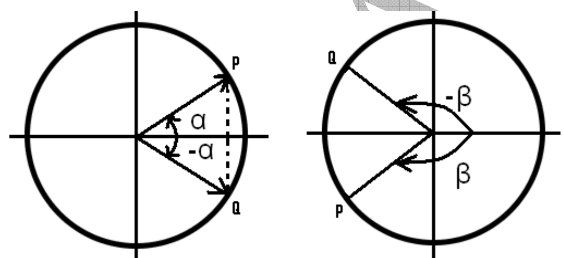
Em resumo podemos ter os seguintes quadros

Quadrante	Seno	Co-seno	Tangente	Cotangente
Primeiro	+	+	+	+
Segundo	+	-	-	-
Terceiro	-	-	+	+
Quarto	-	+	-	-

α	Seno	Co-seno	Tangente	Cotangente
0 radianos	0	1	0	Não definida
$\frac{\pi}{2}$ radianos	1	0	Não definida	0
π radianos	0	-1	0	Não definida
$\frac{3}{2}\pi$ radianos	-1	0	Não definida	0
2π radianos	0	1	0	Não definida

Relação entre as razões trigonométricas de ângulos simétricos

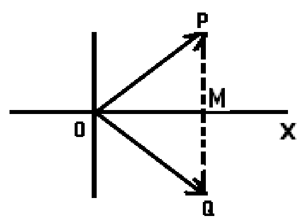
Observa a figura a seguir



Consideremos os pares de ângulos simétricos (α , $-\alpha$) e (β , $-\beta$) os desenhos acima sugerem que em ambos , os pontos P e Q são simétricos em relação ao eixo dos xx.

Para o caso em que $0\,\text{rad} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ rad

Seja A o ponto de intersecção da recta que passa pelos pontos P e Q e o eixo das abcissas como mostra a figura a seguir



Teremos a seguinte situação $\overline{OM} = \overline{OM}$, $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$, ângulos $\angle MOP = \angle QOM = \alpha$ e por isso pode se tirar a seguinte conclusão $\Delta POM \cong \Delta QOM$. Logo $\angle PMO = \angle OMQ$. Mas como a soma das medidas destes dois ângulos é igual a 180^0 então os ângulos $\angle PMO$ e $\angle QMO$ são rectos. Por essa via o ponto M é simultaneamente projecção dos pontos P e Q no eixo das abcissas. Sendo assim, quando (x,y) é o par de coordenadas de P, (x,-y) é o para de coordenadas de Q e por isso $\overline{OM} = \overline{OM} = X$ e $\overline{PM} = \overline{QM} = Y$.

Se (x_1, y_1) fosse o par de coordenadas de Q, teríamos $\text{sen}(-\alpha) = \frac{y_1}{r} = y_1$ mas $y_1 = -y$, logo

$$\text{sen}(-\alpha) = -y = \frac{y}{1} = -\frac{y}{r} = -\text{sen}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x_1}{r} = x_1 = x = \frac{x}{r} = \cos\alpha$$

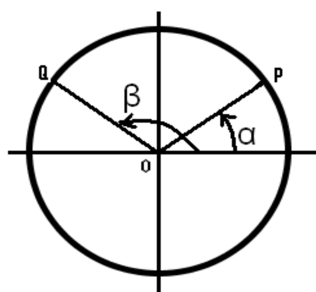
Ou simplesmente $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$ $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$ $\quad \text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\alpha$

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$ $\quad \text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$

Caro estudante para este caso foram apresentados todos os passos para mostrar as relações das razões trigonométricas mas para os outros casos apresentaremos apenas a ilustração no circulo trigonométrico e as relações resultantes, esperando que sozinho faça uma demonstração.

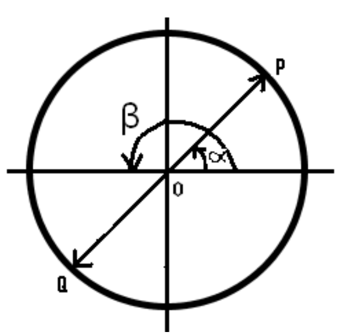
Relações entre razões trigonométricas de ângulos suplementares



$\beta = \pi\text{rad} - \alpha$

$\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$
$\cos\beta = -\cos\alpha$
$\text{tg}\beta = -\text{tg}\alpha$
$\text{cotg}\beta = -\text{cotg}\alpha$
$\sec\beta = -\sec\alpha$
$\text{cosec}\beta = \text{cosec}\alpha$

Relações entre razões trigonométricas de ângulos generalizados, cujas medidas diferem de π radianos



$\beta = \alpha + \pi\text{rad}$

$\text{sen}\beta = -\text{sen}\alpha$
$\cos\beta = -\cos\alpha$
$\text{tg}\beta = \text{tg}\alpha$
$\text{cotg}\beta = \text{cotg}\alpha$
$\sec\beta = -\sec\alpha$
$\text{cosec}\beta = -\text{cosec}\alpha$

Redução ao primeiro quadrante

Caro estudante sabe que as tabelas que temos visto em vários livros só nos permitem encontrar razões trigonométricas de um ângulo agudo. Vamos a seguir analisar um método que nos permitira ultrapassar este problema, o método de redução ao primeiro quadrante. Daí que se considerarmos α um ângulo generalizado qualquer podemos constatar que:

- A periodicidade das razões trigonométricas permite-nos obter um ângulo β, cuja medida satisfaz a propriedade de $-90^0 \le \beta \le 270^0$, cujas razões trigonométricas são iguais às correspondentes do ângulo dado α.

- Quando $\beta = -\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π rad , já são conhecidos os valores das razões trigonométricas, veja o circulo trigonométrico.

- Quando β pertence ao IVQ, sabe que ele se relaciona com um determinado ângulo agudo que pode ser por exemplo δ tal que $\delta = -\beta$. Determinar as razões trigonométricas deste, resume-se na determinação de razões trigonométricas de ângulos simétricos.
- Quando β pertence ao IQ, então já podemos determinar directamente os valores das razões trigonométricas de β e assim de α.

Quando β pertence ao IIQ, temos que δ, definido por $\delta = \pi$ rad - β, pertence ao IQ. Tendo determinado os valores das razões trigonométricas de δ, podemos obter os de β através das fórmulas das razões trigonométricas de ângulos suplementares, e assim os de α.

- E para finalizar, quando β pertence ao IIIQ, temos que δ, definido por $\delta = \beta - \pi$ rad, pertence ao IQ. Tendo determinado os valores das razões trigonométricas de δ, podemos obter os de β, e assim os de α, através das fórmulas de razões trigonométricas de ângulos generalizados, cujas medidas diferem de π radianos

Exemplos:

1. Calcular o seno de 135^0**.**

   $\text{sen}135^0 = ?$ $\alpha = 135^0 = 180^0 - 45^0$

   $\alpha = 135^0$ $\text{sen}135^0 = \text{sen}(180^0 - 45^0) = \text{sen}45^0 = 0{,}707107$
2. Calcular o cosseno de 200^0.

   $\cos 200^0 = ?$ $\alpha = 200^0 = 180^0 + 20^0$

   $\alpha = 200^0$ $\cos 200^0 = \cos(180^0 + 20^0) = -\cos 20^0 = 0{,}939693$

Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é provavelmente o mais célebre dos teoremas da matemática, enunciado pela primeira vez por filósofos gregos chamados de pitagóricos, estabelece uma relação simples entre o comprimento dos lados de um triângulo rectângulo:

Em qualquer triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Se **c** designar o comprimento da hipotenusa e **a** e **b** os comprimentos dos catetos, o teorema afirma que: $c^2 = a^2 + b^2$.

Relação fundamental da trigonometria

A relação que se segue é de grande utilidade na trigonometria e por via disso recebe a designação de relação fundamental da trigonometria.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A partir desta relação podem ser deduzidas outras relações equivalentes como por exemplo:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\text{sens}^2\alpha}$$

O grau e o Radiano

A unidade de medida de ângulo no Sistema Internacional é o **radiano** e o processo para obter um radiano é o seguinte:

Tomamos um segmento de recta OA. Com um compasso centrado no ponto O e abertura OA, traçamos um arco de circunferência AB, sendo que B deve pertencer ao outro lado do ângulo AOB. Se o comprimento do arco for igual ao comprimento do segmento OA, diremos que este ângulo tem medida igual a 1 radiano (1 rad).

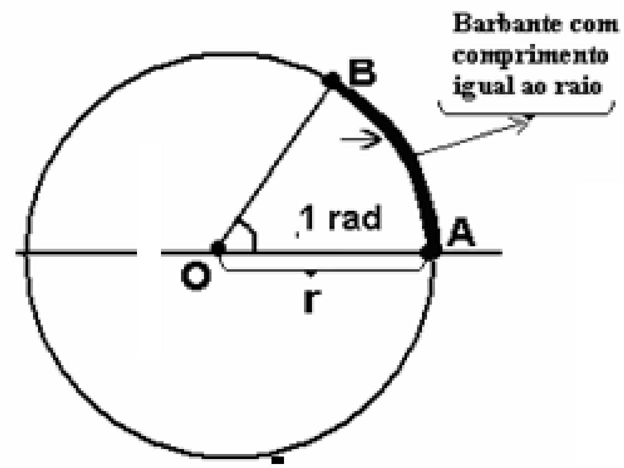
Caro estudante uma forma prática de visualizar isto, é tomar uma recta horizontal passando pelo centro de uma circunferência (não importa a medida do raio).Indicar o ponto A como uma das intersecções da circunferência com a recta horizontal.

Tomar um **barbante** com a mesma medida que o raio OA da circunferência. Fixar uma das extremidades do barbante sobre o ponto A e esticar o barbante sobre a circunferência.

O ponto B coincidirá com a outra extremidade do barbante. Traçamos então o segmento de recta OB, que representa o outro lado do ângulo AOB. A medida do ângulo AOB é 1 radiano.

Uma outra unidade que é muito utilizada é o **grau**. Ela é obtida pela divisão da circunferência em 360 partes iguais, obtendo-se assim um ângulo de um grau, sendo que a notação desta medida usa um pequeno **o** colocado como expoente do número, **como 1º**.

Agora observa a ilustração do que foi descrito no texto anterior.



Relação entre radianos e graus

Radiano: Medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denotaremos por 1 rad

Grau: Medida de um arco que corresponde a 1/360 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

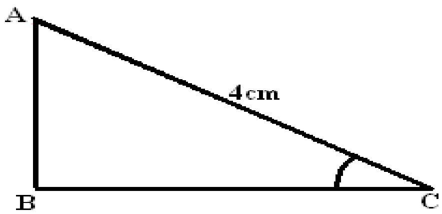
Grado: É a medida de um arco igual a 1/400 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco**.**

Questões possíveis

1. Estabelecer todas relações trigonométricas de um dado triângulo;
2. Dados alguns elementos do triângulo encontrar os outros;
3. Desenhar um triângulo dados os seus elementos;
4. Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas.

Tarefas resolvidas

1. Quais as medidas dos catetos de um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede 4cm e um dos ângulos mede 20º?



Dados

AC =4cm
$A\hat{C}B=\alpha= 20^\circ$

$$\text{Sen}\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{4}$$

$AB = 4\text{Sen}20$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{4}$$

$BC = 4\text{Cos}20$

Tarefas Propostas

Resolva, usando as relações trigonométricas no triângulo rectângulo, os seguintes problemas:

1. Qual o comprimento da sombra de um poste de 5m no instante em que os raios solares estão formando um ângulo de 60º com o solo?

Solução: O comprimento da sombra é de 2,89m.

2. Em uma hora ensolarada, um bastão de 50cm projecta uma sombra de 20cm no solo. Na mesma hora uma árvore projecta sobre o chão uma sombra de 5m. Qual é a altura da árvore?
3. Uma pessoa, cujos olhos distam 170cm do chão afasta-se 2m de um poste e passa a ver sua extremidade sob um ângulo de 60º em relação à horizontal. Qual é a altura do poste?

Solução: A altura do poste é de 5,16m

4. Um técnico dispõe de um teodolito de 1,5m de altura. Apontando esse teodolito contra o topo de um edifício, registra um ângulo de 60º. Afastando-se 100m, registra 20º. Qual é a altura do edifício?
5. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{2}{7}$ obtenha sen α e tan α .

Solução: $sen\alpha = 0{,}95 \quad tg\alpha = 3{,}35$

6. Classifique cada uma das proposições seguintes como verdadeira (V) ou falsa (F):
   ( ) (a) Qualquer que seja o ângulo agudo α , cos α > sen α.
   ( ) (b) Para todo ângulo agudo α, sen α > cos α.
   ( ) (c) Para todo ângulo agudo α, tan α > cos α.
   ( ) (d) Para todo ângulo agudo α, tan α > sen α.
   ( ) (e) Não existe ângulo agudo α, tal que tan α =1000.
   ( ) (f) Existe ângulo agudo α, tal que cos α = 5.
   ( ) (g) Se α = 45º, então sen α = cos α.

7. Num triângulo AEC, rectângulo em Â, sabe-se que sen $\supseteq$ = 0,8 e que a altura relativa à hipotenusa mede 4,8cm. Determine o perímetro desse triângulo.

Solução:

8. Uma escada está encostada numa parede formando um ângulo de 60º com o chão. Se a escada tem 20m de comprimento, que altura ela atinge?

9. Um poste telegráfico é fixado ao solo por um cabo que forma um ângulo de 54º com o chão. A distância entre as extremidades inferiores do poste e do cabo é de 20m. Determine a medida da altura do poste.

Solução:

10. Um homem com 1,80 m de altura está de pé a 3 m de um candeeiro, que está a 3,60m do solo. O comprimento da sombra do homem, produzida pela luz do candeeiro, é:
(A) 6,48 m
(B) 5,4 m
(C) 4,8 m
(D) 3,0 m

11.O ponteiro das horas de um relógio rodou 1890º desde o dia 1 de Janeiro às 12 horas até ao momento em que parou. O ponteiro dos minutos, quer no início, quer no momento de paragem, apontava o 12. Então o relógio parou:
(A) no dia 5 de Janeiro às 12 horas
(B) no dia 4 de Janeiro às 3 horas
(C) no dia 3 de Janeiro às 15 horas.
(D) no dia 3 de Janeiro às 24 horas.

12. Complete, indicando um ângulo do primeiro quadrante, e calcule usando as tabelas para o caso da última alínea.
a) $\text{sen}149^0 = \text{sen}\_\_\_\_ = \cos\_\_\_\_$
b) $\text{sen}250^0 = -\cos\_\_\_\_$
c) $\text{sen}(\frac{8\pi}{5}\text{rad}) = -\cos\_\_\_\_$
d) $\cos 213^0 \quad sen 92^0 \quad \cos 511^0 \quad \cos -732^0 \quad \cot g 112^0$

Amigo estudante. Questões como estas podem serem encontradas nos manuais de Matemática da 10ªclasse e ou em outros tantos livros desta disciplina. Por isso depois de ler todo o texto sobre trigonometria procure formula-los e tente chegar aos resultados, em caso de dificuldades dirija-se ao CAA onde receberá apoio do Tutor e do Professor. Lembre-se será submetido a um teste por isso prepare-se bem para sejas bem sucedido no teste e poderes seguir para a outra parte.

Parte II

Estatística

Amigo Estudante. Seja bem vindo ao sexto módulo. Aqui irá aprender muita estatística. Certamente que já deve ter ouvido falar desta palavra "estatística" pois aparece inúmeras vezes na imprensa falada e escrita na citação das palavras de economistas e políticos. Vamos então, enumerar os objectivos específicos, que deverá perseguir ao longo desta parte.

Objectivos específicos

Sim. São objectivos específicos para esta parte os seguintes:

1. Identificar população e amostra;
2. Interpretar tabelas e gráficos;
3. Organizar e interpretar informação estatística em tabelas e gráficos;
4. Identificar variáveis discretas e variáveis contínuas;
5. Construir gráficos circular, de barras, histogramas e tabelas de frequência;
6. Determinar frequência absoluta, frequência relativa, percentual e acumulada para dados agrupados por classes e variação;
7. Resolver problemas práticos aplicando conhecimentos da estatística.

Conteúdos

Sim. É isso mesmo não deverá mexer em novos conteúdos sem antes rever o que já aprendeu nas classes e ou lições anteriores. Pois estes conteúdos são a base para o seu entendimento dos novos conteúdos. Para este módulo terá de fazer uma boa revisão dos três conteúdos abaixo. Em caso de dificuldades já sabe tem apoio no CAA.

1. População e amostra;
2. Frequência absoluta e relativa;
3. Tabelas de frequência absoluta, relativa, percentual e acumulativa;
4. Medidas de tendência central (média, moda, e mediana);
5. Gráficos circulares e de barras;

Pronto. Já fez a revisão agora pode estudar os conteúdos abaixo. Mais não se esqueça de como se estuda Matemática, nem dos momentos que te propomos logo no início deste guião.

1. Variáveis discretas e contínuas;
2. Tabelas e gráficos para dados agrupados por classes;
3. Tabelas de dupla entrada e gráficos de barras compostas;
4. Tabelas de frequência absoluta, relativa, percentual e acumulada para representar dados agrupados por classes;
5. Medida de dispersão de uma amostra: variância, intervalos de variação, desvio médio e desvio padrão

Abordagem de conteúdos
Caro aluno! Vamos considerar o exemplo abaixo para mostrar uma possível abordagem destes conteúdos

Exemplo : Tabelas e gráficos para dados agrupados por classes;

Considere os seguintes dados

14	21	23	21	16
19	22	25	16	16
24	24	25	19	16
19	18	19	21	12
16	17	18	23	25
20	23	16	20	19
24	26	15	22	24
20	22	24	22	20

Construa um histograma usando os seguintes limites de classe 12-14, 15-17, 18-20, 21-23,e24-26.

Materiais necessários : **Livro de Matemática, material de geometria como régua,....**

Sim. Com o livro você deverá proceder como reza o primeiro momento do método que te apresentamos no início do guião.

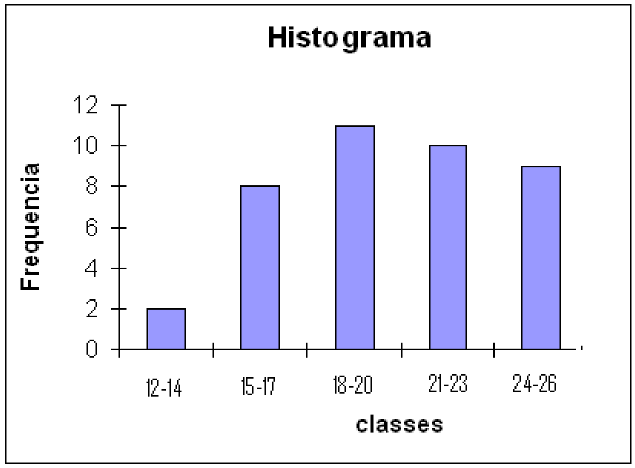
- ❖ Ler com muita atenção e concentração uma ou duas páginas as definições envolvidas no texto sobre Histogramas observar a sua importância sobretudo na apresentação de dados agrupados.
- ❖ Desenhe uma tabela para facilitar a visualização dos dados em causa como a seguinte:

Classes	Frequência
12-14	//
15-17	~~////~~ ///
18-20	~~////~~ ~~////~~ /
21-23	~~////~~ ~~////~~
24-26	~~////~~ ////

- ❖ Desenhe uma outra tabela para facilitar a visualização dos dados já conferidos como a seguinte:

Classes	Frequência	
12-14	//	**2**
15-17	~~////~~ ///	**8**
18-20	~~////~~ ~~////~~ /	**11**
21-23	~~////~~ ~~////~~	**10**
24-26	~~////~~ ////	**9**

❖ Desenhe agora o histograma pedido como se segue:



Agora leia o texto teórico que se segue para consolidar os conhecimentos adquiridos na tarefa anterior. Não se engane por te apressares na leitura deste texto antes da tarefa do exemplo dado. O exemplo acima tratado mostra como pode com segurança realizar outras tarefas que te forem colocadas.

Material teórico

Tipos de variáveis

Caro estudante variável é a característica de interesse que é medida em cada elemento da amostra ou população. Como o nome diz, seus valores variam de elemento para elemento. As variáveis podem ter valores numéricos ou não numéricos.

Classificação de variáveis

Variáveis Quantitativas: são as características que podem ser medidas em uma escala quantitativa, ou seja, apresentam valores numéricos que fazem sentido. Podem ser contínuas ou discretas.

Variáveis discretas: características mensuráveis que podem assumir apenas um número finito ou infinito contável de valores e, assim, somente fazem sentido valores inteiros. Geralmente são o resultado de contagens.

Exemplos: número de filhos, número de bactérias por litro de leite, número de cigarros fumados por dia.

Variáveis contínuas: características mensuráveis que assumem valores em uma escala contínua (na recta real), para as quais valores fraccionais fazem sentido. Usualmente devem ser medidas através de algum instrumento. Exemplos: peso (balança), altura (régua), tempo (relógio), pressão arterial, idade.

Variáveis Qualitativas (ou categóricas): são as características que não possuem valores quantitativos, mas, ao contrário, são definidas por várias categorias, ou seja, representam uma classificação dos indivíduos. Podem ser nominais ou ordinais.

> **Variáveis nominais**: não existe ordenação dentre as categorias. Exemplos: sexo, cor dos olhos, fumante/não fumante, doente/sadio.
>
> **Variáveis ordinais**: existe uma ordenação entre as categorias. Exemplos: escolaridade (1o, 2o, 3o graus), estágio da doença (inicial, intermediário, terminal), mês de observação (Janeiro, Fevereiro,..., Dezembro).

Organização de dados

A colecta de dados estatísticos tem crescido muito nos últimos anos em todas as áreas de pesquisa, especialmente com o advento dos computadores e surgimento de softwares cada vez mais sofisticados.

Ao mesmo tempo, olhar uma extensa listagem de dados colectados não permite obter praticamente nenhuma conclusão, especialmente para grandes conjuntos de dados, com muitas características sendo investigadas.

Para facilitar utilizamos métodos de Estatística Descritiva para organizar, resumir e descrever os aspectos importantes de um conjunto de características observadas ou comparar tais características entre dois ou mais conjuntos.

As ferramentas descritivas são os muitos tipos de **gráficos** e **tabelas** e também medidas de síntese como percentagens, índices e médias.

Ao se condensar os dados, perde-se informação, pois não se têm as observações originais. Entretanto, esta perda de informação é pequena se comparada ao ganho que se tem com a clareza da interpretação proporcionada.

A descrição dos dados também tem como objectivo identificar anomalias, até mesmo resultantes do registro incorrecto de valores, e dados dispersos, aqueles que não seguem a tendência geral do restante do conjunto.

Não só nos artigos técnicos direccionados para pesquisadores, mas também nos artigos de jornais e revistas escritos para o público leigo, é cada vez mais frequente a utilização destes recursos de descrição para complementar a apresentação de um facto, justificar ou referendar um argumento.

Ao mesmo tempo que o uso das ferramentas estatísticas vem crescendo, aumenta também o abuso de tais ferramentas. É muito comum ver em jornais e revistas, até mesmo em periódicos científicos, gráficos voluntariamente ou intencionalmente enganosos e estatísticas obscuras para justificar argumentos polémicos.

Frequência Absoluta (fi) - é o número de vezes que o valor de determinada variável é observado.

O símbolo de somatório

Vamos parar um pouco para explicar o uso do símbolo de somatório pois ele vai aparecer em muitas fórmulas que a seguir vamos apresentar.

Quando queremos abreviar a apresentação de uma soma de várias parcelas, simplesmente usamos este símbolo do alfabeto grego sigma $\sum$.

Nele podem ser apresentadas os limites que nos indicam a extensão das parcelas como por exemplo :

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Como pode reparar que em baixo temos i=1 a indicar que as parcelas começam de 1 e em cima do símbolo temos 6 a indicar que as parcelas vão até 6. Por isso temos seis parcelas.
Em outras palavras como o símbolo $\sum$ no caso vertente tem sobre si e no lugar de **n** o número **6** e **i=1** em baixo, ele nos diz simplesmente para adicionar todos os valores de x_i começando do x_1 até x_6.

Obs: Para melhor entender o uso deste símbolo peça mais explicações ao seu Professor no CAA.

Frequência Absoluta Acumulada (F_i)- é a soma das frequências absolutas anteriores com a frequência absoluta deste valor.

$$F_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{ou} \quad F_i = \sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$$

Frequência Relativa (f_{r_i}) - é o quociente entre a frequência absoluta do valor da variável e o número total de observações.

$$f_{r_i} = \frac{f_i}{n}$$

Frequência Relativa Acumulada (Fri)- é a soma das frequências relativas anteriores com a frequência relativa desse valor.

$$F_{r_i} = \sum_{i=1}^{n} f_{r_i} = f_{r_1} + f_{r_2} + \ldots + f_{r_n}$$

Função Cumulativa - função que indica para cada valor real x a frequência absoluta (ou relativa) de observações com intensidade menor ou igual a x. A representação gráfica desta função é em forma de escada.

Gráfico Circular - é representado por um círculo que está dividido em sectores cujas amplitudes são proporcionais à frequência que lhe corresponde.

Gráfico de Barras - é constituído por barras, horizontais ou verticais, de comprimento proporcional à frequência.

Histograma - é um gráfico de barras em que a área destas é proporcional à frequência, não havendo espaço entre as mesmas. Só se utiliza em variáveis quantitativas contínuas.

Pictogramas - são gráficos onde se utilizam figuras ou símbolos alusivos ao problema em estudo.

Medidas de Tendência Central

Média aritmética simples:

A média aritmética simples, para uma população, é dada por

Dados não agrupados	Dados agrupados	onde x_i: valores observados ou ponto médio fi: frequência absoluta N: tamanho da população k: nº de valores ou intervalos
$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i . x_i}{N}$	

Para uma amostra, a média aritmética simples é calculada por

Dados não agrupados	Dados agrupados	onde xi: valores observados ou ponto médio fi: freqüência absoluta n: tamanho da amostra k : nº de valores ou intervalos
$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i . x_i}{n}$	

Propriedades:

1. A média de um conjunto de números sempre pode ser calculada.
2. Para um dado conjunto de números, a média é única.
3. Somando-se ou subtraindo-se uma constante a cada valor de um conjunto, a média ficará, respectivamente, somada ou subtraída do valor da constante. Analogamente, multiplicando-se ou dividindo-se por uma constante cada valor de um conjunto, a média ficará multiplicada ou dividida, respectivamente, pela constante.
4. A soma dos desvios dos números de um conjunto em relação à média é zero, isto é, $\sum (x_i - \mu) = 0$

5. A média é sensível a todos os valores de um conjunto. Assim, se um valor se modifica, a média também se modifica.

Exemplo1: Cálculo da média para dados não agrupados.
Se considerar-mos que numa turma de 20 alunos na disciplina de geografia os alunos tiveram notas como : 6,7,8,9,9,9,10,10,10,10,11,11,11,11,12,13,14,16,18,19. A média aritmética para este caso seria dada da seguinte forma:

Podemos considerar x_1 a primeira nota e é 6 e x_{20} a vigésima nota que seguindo a ordem indicada é 19 e por sinal a máxima nota..

Aplicando a fórmula teríamos

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} \quad \text{o que é o mesmo que}$$

$$\bar{X} = \frac{6+7+8+9+9+9+10+10+10+10+11+11+11+11+12+13+14+16+18+19}{20}$$

$$\bar{X} = \frac{224}{20} = 11.2$$

Exemplo2: Cálculo da média para dados agrupados.

Considere a tabela a seguir.

Classes	Frequência
10-14	4
15-19	8
20-24	5
25-29	2
30-34	3

Para calcular a média, primeiro tratamos de calcular o ponto médio de cada classe da seguinte forma:

$$\frac{10+14}{2} = 12 \qquad \frac{15+19}{2} = 17 \qquad \frac{20+24}{2} = 22 \qquad \frac{25+29}{2} = 27 \qquad \frac{30+34}{2} = 32$$

E logo:

Classes	Ponto médio(x_i)	Frequência (f_i)	$x_i f_i$
10-14	12	4	48
15-19	17	8	136
20-24	22	5	110
25-29	27	2	54
30-34	32	3	96
	20		444

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i . x_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i . x_i}{n} = \frac{48+136+110+54+96}{20} = \frac{444}{20} = 22{,}2$$

Mediana:
É a medida que ocupa a posição central num conjunto de dados ordenados, isto é,

OBS: Se N é par, a mediana é a média aritmética simples dos dois valores centrais.

Para dados agrupados numa distribuição de frequência, localizamos a posição central através da frequência acumulada. Para distribuição de frequências por intervalo, aplicamos a fórmula abaixo para calcular o valor aproximado da mediana.

$$Med = LI_i + \left(\frac{N/2 - F_{i-1}}{f_i} \right) . h_i$$

Moda:
A moda é a observação mais frequente. Caso não haja observação mais frequente, a distribuição é amodal. Podemos ter um conjunto unimodal (com uma moda), bimodal (com duas modas) ou multimodal (com três ou mais modas).
Para dados agrupados numa distribuição de frequências por ponto, localizamos a moda pela maior frequência absoluta. Para dados agrupados por intervalo, utilizamos

$$Moda = LI_i + \left(\frac{f_{i+1}}{f_{i+1} + f_{i-1}} \right) . h_i$$

Moda Bruta: É o ponto médio do intervalo de maior frequência.

Medidas de Variabilidade:

Amplitude Total: É a diferença entre o maior e o menor valor observado.
Variância:A variância, se os dados forem populacionais, é dada por

Dados não agrupados	Dados agrupados	onde xi: valores observados ou ponto médio
$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2}{N}$	fi: freqüência absoluta N: tamanho da população µ: média populacional k: nº de valores ou intervalos

Se o conjunto observado for uma amostra, então a variância é dada por

Dados não agrupados	Dados agrupados	onde xi: valores observados ou ponto médio
$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{X})^2}{n-1}$	fi: freqüência absoluta n: tamanho da amostra $\overline{X}$: média amostral k : nº de valores ou intervalos

Fórmulas abreviadas:

	Dados não agrupados	Dados agrupados
População	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2$	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{N} - \mu^2$
Amostra	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$

Desvio padrão:

População	Amostra
$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$S = \sqrt{S^2}$

Propriedades:

O desvio padrão pode ser definido por

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - a)^2}{N}}$$

onde a é uma medida qualquer. O desvio padrão é mínimo quando a=μ.

Somando-se ou subtraindo-se uma constante a cada valor de um conjunto de dados, o desvio padrão não se altera. Multiplicando-se ou dividindo-se por uma constante cada valor de um conjunto, o desvio padrão também fica multiplicado ou dividido, respectivamente, pela constante.

Questões possíveis

1. Indicar ou avaliar variáveis discretas e contínuas;
2. Construir ou analisar tabelas e gráficos para dados agrupados por classes;
3. Construir tabelas de dupla entrada e gráficos de barras compostas;
4. Construir ou analisar tabelas de frequência absoluta, relativa, percentual e acumulada para representar dados agrupados por classes;

5. Determinar ou calcular medidas de dispersão de uma amostra tais como variância, intervalos de variação, desvio médio e desvio padrão

Tarefas resolvidas

1. Diga porque é que as seguintes situações representam más amostras:

a) Para saber qual o candidato mais votado, para o Município de determinada Província, auscultou-se a opinião dos clientes de determinado supermercado.
b) Para conhecer a situação financeira das empresas têxteis Moçambicanas, verificou-se a situação das empresas que tiveram maior volume de exportações, no último ano.

Solução: As situações apresentadas não são representativas das populações de onde foram retiradas, pois são amostras enviesadas.

a) Diferentes tipos de pessoas frequentam diferentes tipos de supermercados. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado. Podemos, ainda, concluir que os preços e o tipo de produtos que estão à venda não são iguais em todos os supermercados, pelo que a amostra não é representativa.

b) Verificou-se, certamente, que a situação financeira das empresas têxteis Moçambicanas, é melhor do que é na realidade.

2. Num estudo feito numa escola, recolheram-se dados referentes às seguintes variáveis:

(A) idade	(E) tempo gasto diariamente no estudo
(B) ano de escolaridade	(F) distância de casa à escola
(C) sexo	(G) local de estudo
(D) nota na disciplina de Matemática	(H) número de irmãos

a) Das variáveis indicadas, quais são as quantitativas e quais são as qualitativas?
b) Das variáveis quantitativas, diz quais são contínuas.

Solução:

a) Quantitativas: A, D, E, F, H. Qualitativas: B, C, G.
b) São variáveis quantitativas contínuas: E, F (e eventualmente A; a variável idade também é contínua, pois pode tomar qualquer valor num intervalo, embora seja normalmente tratada como discreta).

Tarefas Propostas

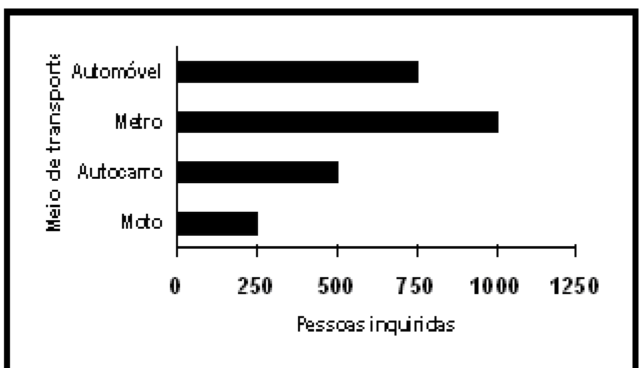
1. Para realizar um estudo sobre o tempo gasto, em minutos, por 60 elementos de um clube de *karting* num circuito de 20 voltas, registou-se o tempo gasto por 16 desses elementos. Os resultados foram os seguintes:

14,1	13,5	15,0	16,2	17,6	18,7	13,1	15,4
16,6	17,2	14,8	15,9	18,0	16,3	14,9	14,3

Indique:

a) A população;
b) A amostra.
c) A variável estatística do estudo e classifique-a.
d) Quatro valores que a variável estatística pode assumir.

2. Numa cidade de 20000 habitantes fez-se um inquérito sobre o meios de transporte utilizado diariamente para se deslocarem para o emprego. Foram interrogadas 2500 pessoas e os resultados foram registados no seguinte gráfico:



Construa uma tabela com a frequência relativa de cada um dos transportes.

3. As alturas, em centímetros, dos alunos de uma turma do 10º ano são as seguintes:

150	169	174	155	165	170	172
152	158	163	158	166	158	166
170	171	162	171	161	154	168
161	164	166	164	162	156	167

a) Construa uma tabela de frequências, agrupando os dados em classes.

b) Represente graficamente os dados, utilizando o tipo de gráfico que achar mais conveniente.

4. Considere os seguintes resultados de um exame de Matemática realizado a 213 alunos:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Freq. Abs.	1	1	5	7	12	13	16	15	17	32	17	21	12	16	8	4	7	5	4

a) Calcule a média e o desvio padrão dos dados.

b) Represente graficamente os dados na forma de um histograma considerando as seguintes classes: [1,3[, [3,5[, [5,7[, [7,9[, [9,11[, [11,13[, [13,15[, [15,17[, [17,19[, [19,21[.

c) Qual o aspecto apresentado pelo histograma?

d) Verifique quantas notas pertencem ao intervalo $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$. Corresponde a que percentagem? Comente o valor obtido.

e) Verifique quantas notas pertencem ao intervalo. Corresponde a que percentagem? Comente o valor obtido.

Parte III

Geometria espacial

Amigo Estudante. Seja bem vindo ao sétimo módulo. Aqui irá aprender muita geometria. Certamente que já deve ter ouvido falar desta palavra "geometria" pois não poucas vezes tem ouvido falar de vários conceitos que são tratados nesta área. Vamos então, enumerar os objectivos específicos, que deverá perseguir ao longo desta parte.

Objectivos específicos

Sim. São objectivos específicos para esta parte os seguintes:

1. Identificar e interpretar relações espaciais;

2. Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico;

Conteúdos

Sim. É isso mesmo não precisa de fazer nenhuma revisão pois este assunto é totalmente novo apesar de ser te já familiar. Desta vez vamos apresentar-te logo os conteúdos em causa.

- Noções de ponto, recta, plano
- Axioma de existência
- Axioma de determinação
- Axioma de inclusão
- Axioma de intersecção

Teoremas sobre Posição relativas de rectas e planos

- Critérios de paralelismo de recta e plano
- Critério de perpendicularidade de recta e plano.

Teoremas sobre posição relativa de planos;

- Critérios de paralelismo de planos
- Critério de perpendicularidade de planos.

Abordagem de conteúdos

Caro aluno! Vamos considerar o exemplo abaixo para mostrar uma possível abordagem destes conteúdos

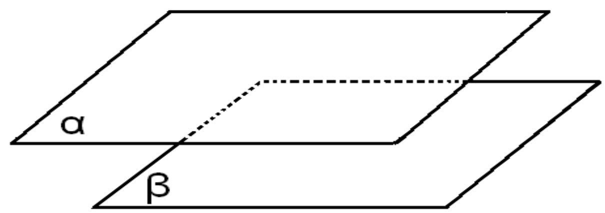
Exemplo : Construir dois planos paralelos.

Materiais necessários: **Livro de Matemática, material de geometria como régua,....**

Sim. Com o livro você deverá proceder como reza o primeiro momento do método que te apresentamos no início do guião.

- ❖ Ler com muita atenção e concentração uma ou duas páginas as definições envolvidas no texto sobre objectos espaciais, posição relativa destes objectos.

De certeza que com esta leitura poderá chegar a conclusão de que para que dois planos sejam paralelos é necessário que a sua intercessão seja nula. Chegará também facilmente à conclusão de que é usual representar os planos com recurso a figura do paralelogramo. E assim poderá representa-los com ajuda de material geométrico como a régua e outros como se segue:



$\alpha // \beta$

Agora leia o texto teórico que se segue para consolidar os conhecimentos adquiridos na tarefa anterior. Não se engane por te apressares na leitura deste texto antes da tarefa do exemplo dado. O exemplo acima tratado mostra como pode com segurança realizar outras tarefas que te forem colocadas

Material teórico

Geometria espacial.

A Geometria espacial (euclidiana) funciona como uma ampliação da Geometria plana (euclidiana) e trata dos métodos apropriados para o estudo de objectos espaciais assim como a relação entre esses elementos. Os objectos primitivos do ponto de vista espacial, são: pontos, rectas, segmentos de rectas, planos, curvas, ângulos e superfícies.

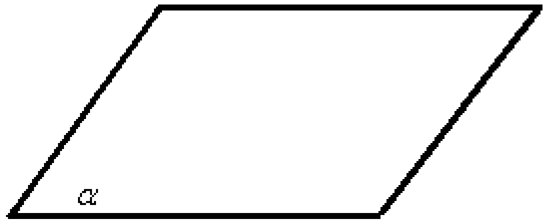
Conceitos primitivos

São conceitos primitivos (e, portanto, aceitos sem definição) na Geometria espacial os conceitos de ponto, recta e plano. Habitualmente, usamos a seguinte notação:

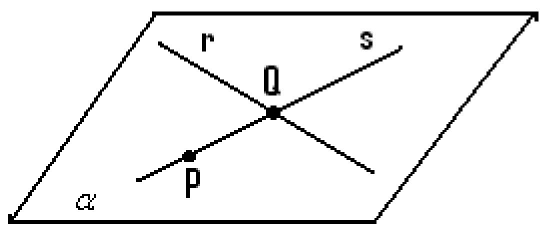
Pontos: letras maiúsculas do alfabeto por exemplo: **A, B, S, T**,.....

Retas: letras minúsculas do alfabeto por exemplo: **a, b, r, s, t,.....**

Planos: letras minúsculas do alfabeto grego por exemplo: α, β, δ, ω,....



Observação: Espaço é o conjunto de todos os pontos.
Por exemplo, da figura a seguir, podemos escrever:



$P \in r$

$Q \in s \cap r$

$s \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$

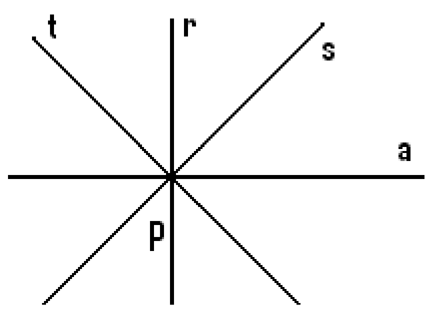
Axiomas

Axiomas, ou postulados (P), são proposições aceites como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.
Temos como axioma fundamental: existem infinitos pontos, rectas e planos.

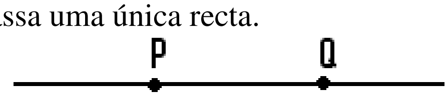
Postulados sobre pontos e rectas

P_1. A recta é infinita, ou seja, contém infinitos pontos.

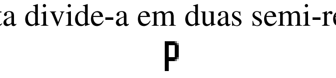
P_2. Por um ponto podem ser traçadas infinitas rectas.



P_3. Por dois pontos distintos passa uma única recta.

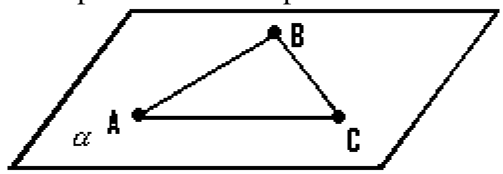


P_4. Um ponto qualquer de uma recta divide-a em duas semi-rectas.



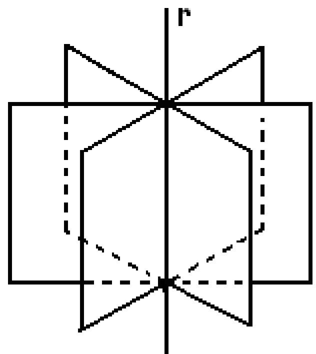
Postulado sobre o plano e o espaço

P_5. Por três pontos não-colineares passa um único plano.



P_6. O plano é infinito, isto é, ilimitado.

P_7. Por uma recta pode ser traçada uma infinidade de planos.

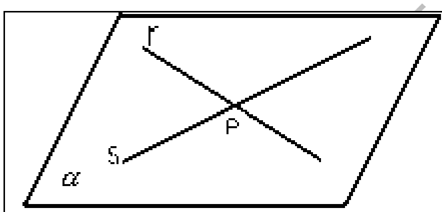


P_8. Toda recta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas semi-planos.

P_9. Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços

Posições relativas de duas rectas

No espaço, duas rectas distintas podem ser concorrentes, paralelas ou reversas:

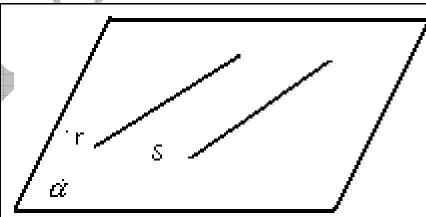


Concorrentes

$r \cap s = \{P\}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

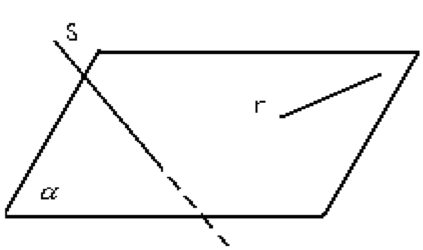


Paralelas

$r \cap s = \{\ \}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$



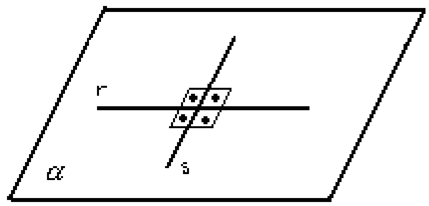
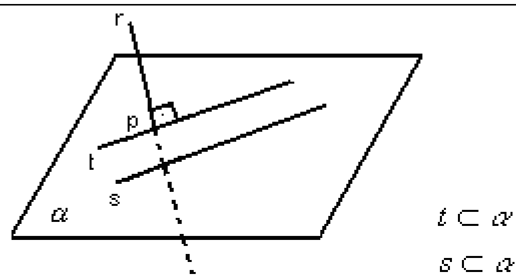
Re *versas*

$r \cap s = \{\ \}$

não existe plano que copntenha

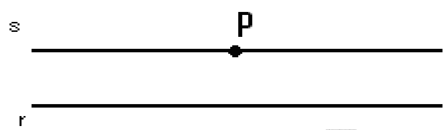
r e s simultanea mente

Rectas perpendiculares:

	
$r \perp s$	$r \perp t$ e $r \perp s \Rightarrow t\,//\,s$

Postulado de Euclides ou das rectas paralelas

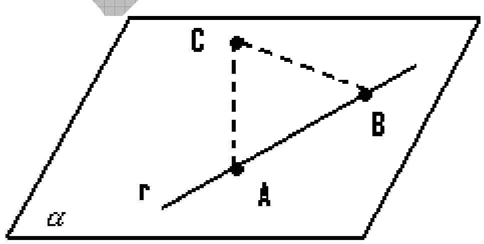
P$_{10}$. Dados uma recta r e um ponto P $\notin$ r, existe uma única recta s, traçada por P, tal que r // s:

	$\left.\begin{matrix} P \notin r \\ P \in s \end{matrix}\right\} \exists \vert\, s//r$

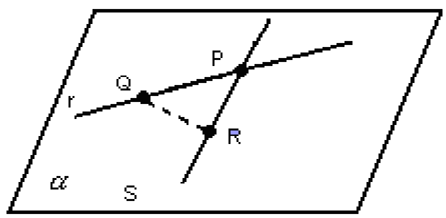
Determinação de um plano

Lembrando que, pelo postulado **P$_5$**, um único plano passa por três pontos não-colineares, um plano também pode ser determinado por:

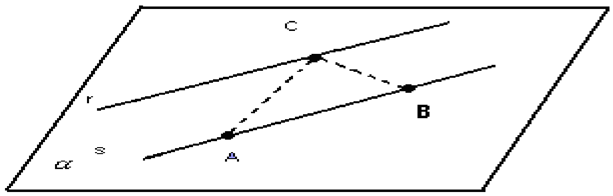
- uma recta e um ponto não-pertencente a essa recta:



- duas rectas distintas concorrentes:



- duas rectas paralelas distintas:

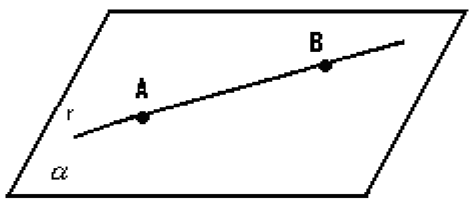


Posições relativas de recta e plano

Vamos considerar as seguintes situações:

a) recta contida no plano

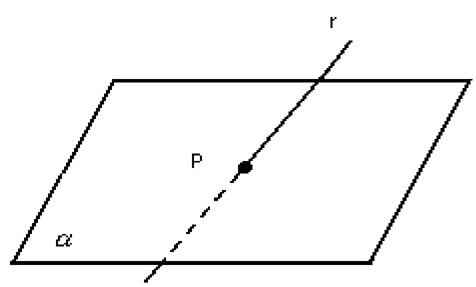
Se uma recta r tem dois pontos distintos num plano α, então r está contida nesse plano:



$$\left.\begin{array}{l} A\in\alpha \text{ e } B\in\alpha \\ A\in r \text{ e } B\in r \end{array}\right\}\Rightarrow r\subset\alpha$$

b) recta concorrente ou incidente ao plano

Dizemos que a recta r "fura" o plano α ou que r e α são concorrentes em P quando $r\cap\alpha=\{P\}$.



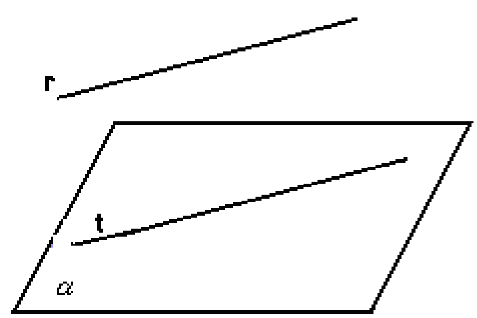
Observação: A recta r é reversa a todas as rectas do plano que não passam pelo ponto P.

c) recta paralela ao plano

Se uma recta r e um plano α não têm ponto em comum, então a recta r é paralela a uma recta t contida no plano α; portanto, r // α

$$r \;//\; t \text{ e } t\subset\alpha \Rightarrow r \;//\; \alpha$$

Em α existem infinitas rectas paralelas, reversas ou ortogonais a r.



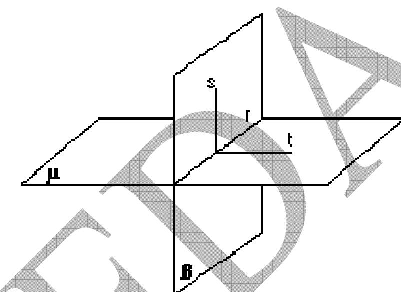
P_{11}. Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua intersecção é dada por uma única recta que passa por esse ponto.

Posições relativas de dois planos no espaço

Para falarmos das posições relativas de dois planos no espaço vamos começar por recordar o Axioma que nos diz que "***a intersecção de dois planos concorrentes é uma recta***". Chamamos então planos concorrentes a quaisquer dois planos que tenham uma, e uma só, recta em comum.

Os planos concorrentes dividem-se em dois grupos consoante o ângulo que formam entre si:

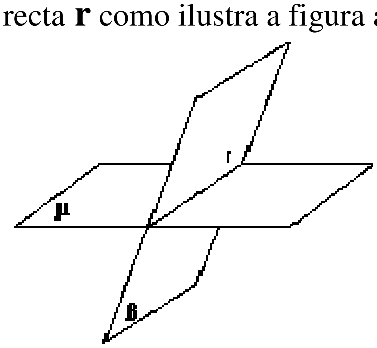
Planos perpendiculares
Dois planos concorrentes dizem-se perpendiculares se formarem entre si um ângulo de 90°, isto é, se em cada um deles existir uma recta perpendicular ao outro. A intersecção de ambos dá uma recta **r**.



Desta forma se deduz o seguinte critério de perpendicularidade:

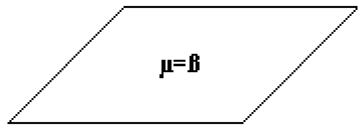
Critério de perpendicularidade de dois Planos.
Se um plano contém uma recta perpendicular a outro, então os dois planos são perpendiculares.

Planos oblíquos
Se os dois planos concorrentes não formam entre si um ângulo recto, chamam-se oblíquos, e também a sua intersecção dá uma recta **r** como ilustra a figura abaixo.

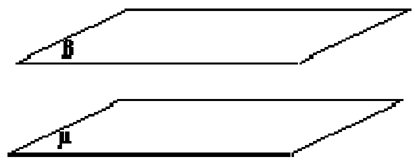


Se os dois planos não são concorrentes dizemos que são paralelos e dividem-se em dois casos:

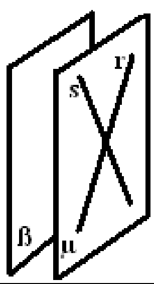
Planos coincidentes ou paralelos no sentido lato
Dois planos dizem-se coincidentes ou paralelos em sentido lato se tiverem mais do que uma recta em comum.



Planos paralelos no sentido estrito
Dois planos dizem-se estritamente paralelos se não existir nenhum ponto em comum aos dois planos, e a intersecção de ambos é nula.

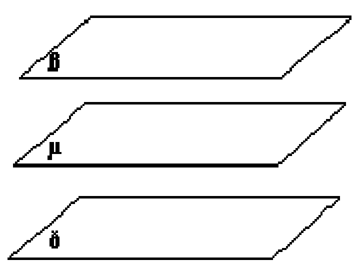


Critério de paralelismo de dois planos
Se um plano contém duas rectas concorrentes a outro plano então os dois planos são paralelos.

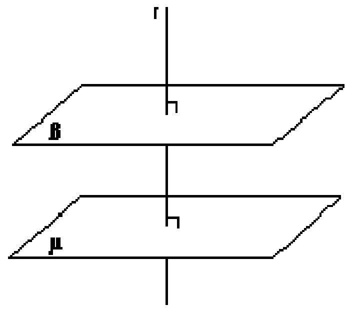
	**$r//\beta$ e $s//\beta$ e** $r \subset \mu$ **e** $s \subset \mu$ então $\mu//\beta$

Vamos agora, enunciar alguns resultados demonstrados por Euclides e que estão associados aos critérios de perpendicularidade e de paralelismo, enunciados anteriormente.

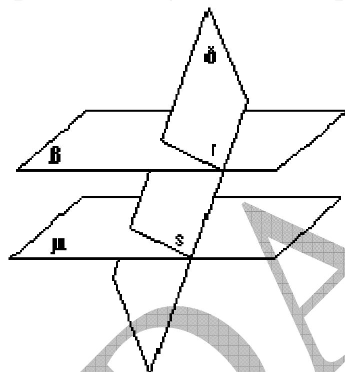
Teorema 1: Dois planos distintos paralelos a um terceiro, são estritamente paralelos entre si.



Teorema 2*:* Se dois planos são perpendiculares à mesma recta, então são paralelos.



Teorema 3*:* Um plano corta planos paralelos segundo rectas paralelas.



Posições relativas de rectas no espaço

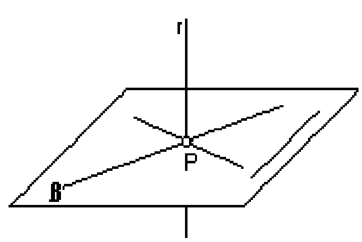
No espaço duas rectas podem ser classificadas como ***complanares*** ou ***não complanares***.

Rectas complanares: Duas rectas dizem-se complanares se e só se estão contidas num mesmo plano.

A forma como estas se relacionam posicionalmente nesse plano já foi abordada anteriormente em "posições relativas de duas rectas num plano".

Rectas não complanares: Se não existe nenhum plano que contenha as duas rectas então dizemos que estas são não complanares.

Duas rectas ***r*** e ***s*** não complanares dizem-se perpendiculares se *r* for perpendicular a duas rectas secantes complanares a ***s***.

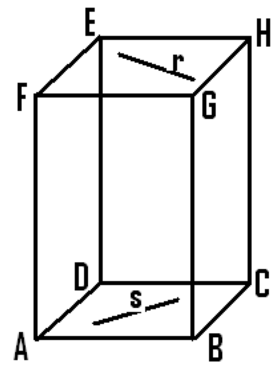


Questões possíveis

1. Definir conceitos e visualizar conceitos primitivos;
2. Construir objectos geométricos dadas as suas características;
3. Indicar a relação de objectos espaciais à luz dos postulados, teoremas, critérios;
4. Analisar afirmações dando o juízo de valor ;
5. Identificar objectos dada uma figura;
6. Julgar a relação de objectos espaciais.

Tarefas resolvidas

1. Observe o sólido geométrico:



a) Qual a posição relativa da recta FG e do plano ADB? Justifique, utilizando um dos critérios estudados.

b) Justifica a afirmação: «Os planos BCH e ADE são paralelos».

c) «A recta EF é paralela ao plano que contém a recta **s** ». Justifica esta afirmação, usando um dos critérios estudados

Solução:

a) A recta FG é paralela ao plano ADB pois o plano ADB contém uma recta, a recta AB que é paralela à recta FG . Se uma recta FG e um plano ADB não têm ponto em comum, então a recta FG é paralela a uma recta AB contida no plano ADB; portanto, FG // plano ADB.

b) Nos dois planos podemos encontrar as rectas AD e BC que são paralelas logo os dois planos são paralelos.

c) Pela mesma razão da alínea **a**.

Tarefas Propostas

1– Diga o valor lógico das proposições:

a) Se uma recta é paralela a um plano então é paralela a todas as rectas desse plano.

b) Se dois planos são paralelos então toda a recta de um deles é paralela ao outro.

c) Se dois planos são paralelos, toda a recta de um deles é paralela a qualquer recta do outro.

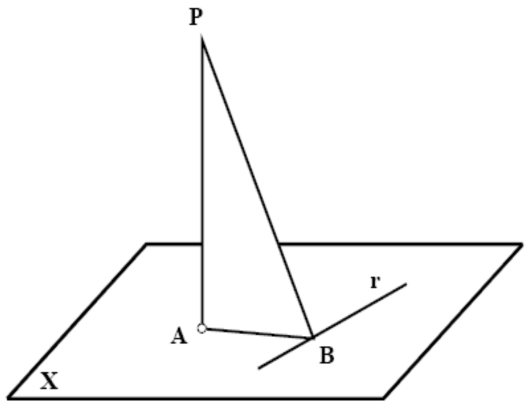
d) Se dois planos são perpendiculares, toda a recta de um deles é perpendicular ao outro.

2 – Quantas rectas é possível fazer passar por um ponto? Que nome tem esse conjunto de rectas?
3 – Uma recta r está contida num plano α.

a) Se uma recta for perpendicular à recta sr, ela será perpendicular ao plano α?

b) Se uma recta for perpendicular ao plano $t\alpha$, será perpendicular à recta r?

4 - Na figura temos : **ABrXP**

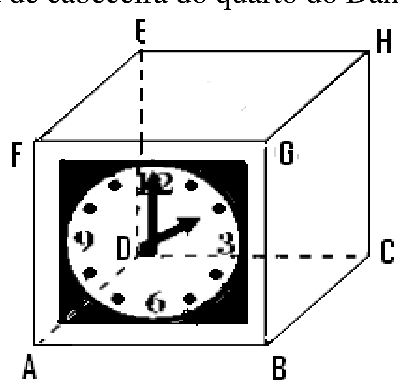


- $PA \perp x$, sendo A o traço da recta no plano.
- $r \subset x$ e $AB \subset x$
- $r \perp PAB$

Justifique as seguintes afirmações:

a) O plano do triângulo ΔPAB é perpendicular ao plano x.
b) $PA \perp r$

4. Observe o relógio da mesinha de cabeceira do quarto do Daniel que tem a forma de um cubo.

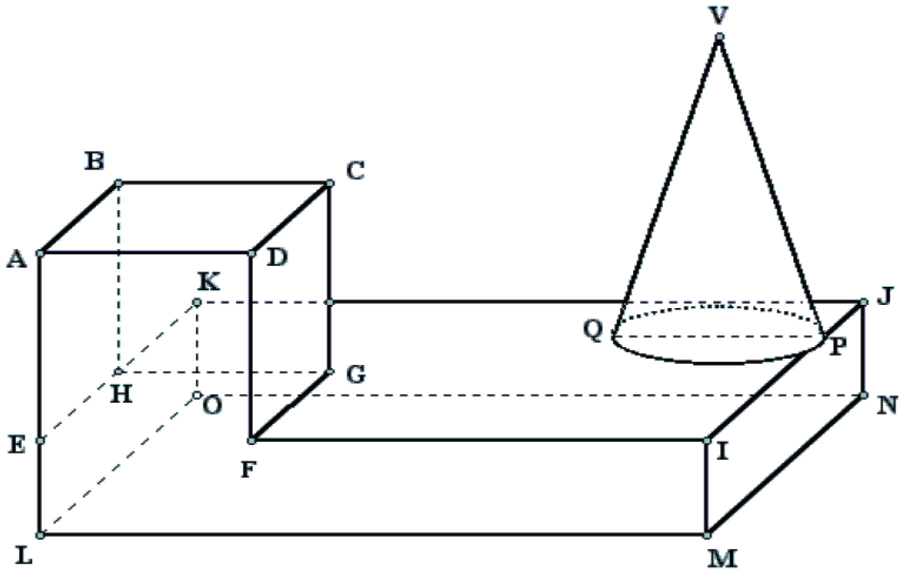


Justifique cada uma das afirmações, usando os critérios estudados:
a) ( ) O plano EFG e o que contém o mostrador do relógio são perpendiculares.
b) ( ) As faces laterais do relógio pertencem a planos paralelos.

c) (   ) A recta que contém os números 6 e 12 do mostrador é perpendicular ao plano da base do relógio.

d) (   ) A recta que contém os números 3 e 9 do mostrador é paralela ao plano da face superior do relógio.

5. Considera o sólido da figura constituído pelo cubo [ABCDEFGH], o paralelepípedo [EIJKLMNO] e o cone de revolução de vértice V e diâmetro [QP].



a) Define, de três formas distintas, o plano que contém a face [IJMN].

b) Indica a posição relativa:

- das rectas AB e CD
- das rectas VQ e VP
- das rectas JN e LM

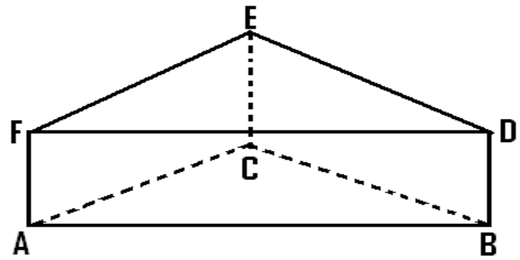
c) Indica a posição relativa do plano que contém a face [ABCD] do cubo e do plano que contém a base do cone.

d) Utilizando as letras da figura, dá exemplo de dois planos concorrentes perpendiculares.

e) Indica a posição relativa:

- da recta VQ e do plano LMN
- da recta QP e do plano EIJ

6 - Na figura abaixo está representado um prisma triangular.



a) Quantos planos é possível definir:

- com os vértices B, D e E?
- com os vértices D, E e A?
- com a aresta FE e o vértice B?
- com as arestas FE e AC?
- com as arestas FE e BD?
- com as arestas ED , EC e CA ?

b) Quantos planos é possível definir com os vértices A , B , C e D ? Quantos desses planos contêm faces do prisma ?

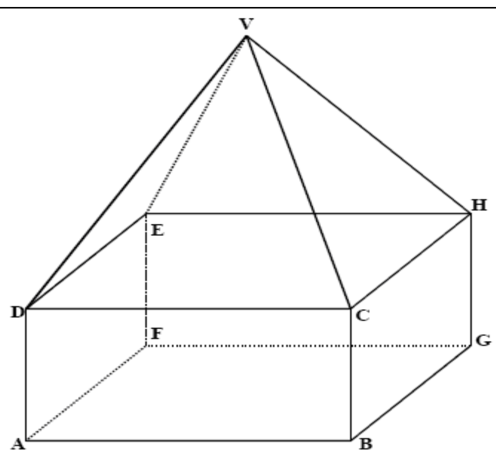
c) Quantos planos é possível definir com os vértices do prisma ?

d) Indique, utilizando as letras da figura:

- duas rectas paralelas;
- duas rectas não complanares;
- duas rectas concorrentes;
- dois planos paralelos;
- dois planos perpendiculares.

e) indique quatro formas diferentes de definir o plano que contém a face ABDF.

7. Na figura está representado um sólido constituído por uma pirâmide quadrangular regular cuja base coincide com a base do prisma quadrangular *ABCDEFGH*



a) Indique três rectas perpendiculares à recta BC.

b) Indique duas rectas perpendiculares à recta EC.

c) Indique a recta de intersecção :

- do plano ADG com o plano CDE
- do plano ABF com o plano DBH.

d) Qual é a posição relativa do plano VBC e da recta EH?

Tabelas trigonométricas

Para saber uma razão trigonométrica, por exemplo, do ângulo de 35º, podemos recorrer a uma tabela de razões trigonométricas, e basta percorrer a linha que tem 35º para sabermos que sen 35º= 0,5736   cos 35º=0,8192   tg35º=0,7002

ÂNGULO	SEN	COS	TG	ÂNGULO	SEN	COS	TG
1	0,017452	0,999848	0,017455	18	0,309017	0,951057	0,32492
2	0,034899	0,999391	0,034921	19	0,325568	0,945519	0,344328
3	0,052336	0,99863	0,052408	20	0,34202	0,939693	0,36397
4	0,069756	0,997564	0,069927	21	0,358368	0,93358	0,383864
5	0,087156	0,996195	0,087489	22	0,374607	0,927184	0,404026
6	0,104528	0,994522	0,105104	23	0,390731	0,920505	0,424475
7	0,121869	0,992546	0,122785	24	0,406737	0,913545	0,445229
8	0,139173	0,990268	0,140541	25	0,422618	0,906308	0,466308
9	0,156434	0,987688	0,158384	26	0,438371	0,898794	0,487733
10	0,173648	0,984808	0,176327	27	0,45399	0,891007	0,509525
11	0,190809	0,981627	0,19438	28	0,469472	0,882948	0,531709
12	0,207912	0,978148	0,212557	29	0,48481	0,87462	0,554309
13	0,224951	0,97437	0,230868	30	0,5	0,866025	0,57735
14	0,241922	0,970296	0,249328	31	0,515038	0,857167	0,600861
15	0,258819	0,965926	0,267949	32	0,529919	0,848048	0,624869
16	0,275637	0,961262	0,286745	33	0,544639	0,838671	0,649408
17	0,292372	0,956305	0,305731	34	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,573576	0,819152	0,700208	63	0,891007	0,45399	1,962611
36	0,587785	0,809017	0,726543	64	0,898794	0,438371	2,050304
37	0,601815	0,798636	0,753554	65	0,906308	0,422618	2,144507
38	0,615661	0,788011	0,781286	66	0,913545	0,406737	2,246037
39	0,62932	0,777146	0,809784	67	0,920505	0,390731	2,355852
40	0,642788	0,766044	0,8391	68	0,927184	0,374607	2,475087
41	0,656059	0,75471	0,869287	69	0,93358	0,358368	2,605089
42	0,669131	0,743145	0,900404	70	0,939693	0,34202	2,747477
43	0,681998	0,731354	0,932515	71	0,945519	0,325568	2,904211

44	0,694658	0,71934	0,965689		72	0,951057	0,309017	3,077684
45	0,707107	0,707107	1		73	0,956305	0,292372	3,270853
46	0,71934	0,694658	1,03553		74	0,961262	0,275637	3,487414
47	0,731354	0,681998	1,072369		75	0,965926	0,258819	3,732051
48	0,743145	0,669131	1,110613		76	0,970296	0,241922	4,010781
49	0,75471	0,656059	1,150368		77	0,97437	0,224951	4,331476
50	0,766044	0,642788	1,191754		78	0,978148	0,207912	4,70463
51	0,777146	0,62932	1,234897		79	0,981627	0,190809	5,144554
52	0,788011	0,615661	1,279942		80	0,984808	0,173648	5,671282
53	0,798636	0,601815	1,327045		81	0,987688	0,156434	6,313752
54	0,809017	0,587785	1,376382		82	0,990268	0,139173	7,11537
55	0,819152	0,573576	1,428148		83	0,992546	0,121869	8,144346
56	0,829038	0,559193	1,482561		84	0,994522	0,104528	9,514364
57	0,838671	0,544639	1,539865		85	0,996195	0,087156	11,43005
58	0,848048	0,529919	1,600335		86	0,997564	0,069756	14,30067
59	0,857167	0,515038	1,664279		87	0,99863	0,052336	19,08114
60	0,866025	0,5	1,732051		88	0,999391	0,034899	28,63625
61	0,87462	0,48481	1,804048		89	0,999848	0,017452	57,28996
62	0,882948	0,469472	1,880726		90	1	0	-

Uso da calculadora

Utilizando a calculadora científica é fácil saber as razões trigonométricas de um ângulo agudo. Começa por verificar se a calculadora está a trabalhar em graus (aparece Deg no mostrador) Para calculares, por exemplo, sen40º é só introduzir 40 e carregar na tecla sin(há maquinas em que primeiro tens de carregar na tecla sin e só depois introduzes o valor).O mesmo acontece para o co-seno e para a tangente

Por construção

Se não tiveres tabela nem calculadora, podes sempre chegar ao valor de uma razão trigonométrica, construindo um triângulo rectângulo.
Por exemplo, para saber o sen50º começas por construir um ângulo de 50º com a ajuda de um transferidor e constróis em seguida um triângulo em que o ângulo de 50º seja um dos seus ângulos internos. Com a ajuda de uma régua medes o comprimento dos catetos e da hipotenusa do triângulo e com esses valores podes calcular as razões trigonométricas do ângulo de 50º.

Bibliografia

Bento de Jesus, Graça. Lições de Algebra e Análise Matemática, 1960.

CETEB, Matem]atica 2º Grau, Brasília, 1995.

Caldas, Ivete. Fonseca, Teresa. Matemática , uma linguagem universal, 5º ano de escolaridade, 7ª edição, 1991

Hoang, Tran Thach. Texto de Apoio de Geometria Espacial, UEM, 2000

UEM, Faculdade de Matem]atica. Manuual da 10ª classe, Maputo, 1980.

Nhezê, Ismael Cassamo. João, Rafael. Matemática 10ª classe.

Hoel, Paul Gerhard. Estatística Elementar, Editora Atlas, São Paulo 1981.

Neves, Maria Augusta. Vieira, Teresa Coutinho. Alves, Alfredo Gomes. Matemática 11º ano, Porto Editora,1960.